



# Commande de systèmes d'isolation antisismique mixte

Catalin Stefan Teodorescu

## ► To cite this version:

Catalin Stefan Teodorescu. Commande de systèmes d'isolation antisismique mixte. Autre [cond-mat.other]. Université Paris Sud - Paris XI, 2013. Français. NNT : 2013PA112156 . tel-00904280

**HAL Id: tel-00904280**

**<https://theses.hal.science/tel-00904280>**

Submitted on 14 Nov 2013

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

UNIVERSITÉ PARIS-SUD

ÉCOLE DOCTORALE : STITS

Laboratoire d'Études de Mécanique Sismique (CEA Saclay)  
Laboratoire des Signaux et Systèmes (CNRS-SUPELEC-UPS)

*DISCIPLINE PHYSIQUE*

THÈSE DE DOCTORAT

soutenue le 30/09/2013

par

Catalin Stefan TEODORESCU

Commande de systèmes d'isolation antisismique mixte
--

**Directeur de thèse :**  
**Co-directeur de thèse :**

Messaoud BENIDIR  
Sette DIOP

Professeur (Université Paris-Sud)  
Chargé de recherche (CNRS)

**Composition du jury :**

*Président du jury :*  
*Rapporteurs :*

Jean LEVINE  
Eric JACQUELIN  
Dumitru POPESCU  
Nicolas ILE  
Ioannis POLITOPOULOS

Directeur de recherche (MINES ParisTech)  
Professeur (Université Claude Bernard Lyon 1)  
Professeur (Université Politehnica de Bucarest)  
Ingénieur de recherche (CEA Saclay)  
Ingénieur de recherche (CEA Saclay)

*Examineurs :*

Laboratoire d'Études de Mécanique  
Sismiques  
DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI  
Commissariat à l'énergie atomique et  
aux énergies alternatives  
F-91191 Gif-sur-Yvette Cedex, France

Tél. : +33 (0)1 69 08 39 46  
Fax. : +33 (0)1 69 08 83 31

[www-tamaris.cea.fr](http://www-tamaris cea fr)  
[www-saclay.cea.fr](http://www-saclay cea fr)

École Doctorale des Sciences et  
Technologies de l'Information des  
Télécommunications et des Systèmes  
Université Paris-Sud Institut d'Élec-  
tronique Fondamentale  
ED STITS – ED N° 422  
Bâtiment 220 (Porte 008) – Rue  
Ampère  
F-91405 Orsay, France

Tél. : +33 (0)1 69 15 78 49  
<http://ed-stits.fr>

# Remerciements

La soutenance a constitué la concrétisation et l'aboutissement de mon projet de thèse, un miracle qui est devenu réalité grâce aux gens que j'ai pu rencontrer sur le chemin de la vie.

Permettez-moi de commencer mes remerciements par les membres du jury. Je veux remercier Monsieur Jean Lévine, mon ancien professeur pendant le Master Recherche en automatique que j'ai fait à SUPELEC, qui me fait l'honneur d'avoir accepté d'être le président du jury. Je veux également exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à Messieurs les rapporteurs Dumitru Popescu (venu spécialement de la Roumanie pour participer à ma soutenance de thèse) et Eric Jacquelin. Puis je tiens à remercier Monsieur Nicolas Ile pour le temps consacré à l'examen de mon mémoire de thèse. Vos commentaires ont contribué à mûrir et construire ma réflexion et à ajouter une nouvelle couche de profondeur à ma pensée.

Je souhaite continuer par remercier mes deux directeurs de thèse Messieurs Messaoud Benidir et Sette Diop pour avoir accepté de partager avec moi le risque associé à un travail assez difficile. Je leur remercie de leur constante confiance et de m'avoir guidé vers la réussite et l'aboutissement de la thèse. En particulier, je tiens à remercier Monsieur Sette Diop : j'ai énormément apprécié la qualité de la relation humaine que nous avons construite, votre diplomatie et votre très haute capacité de communication. À l'avenir, ces qualités constitueront des indicateurs que j'utiliserai pour me guider dans la vie professionnelle et personnelle.

Je remercie Ioannis Politopoulos qui a lancé le sujet de thèse, mon encadrant CEA, pour ses critiques constructives scientifiques. Également, j'aimerais remercier Pierre-Alexandre Bliman pour avoir établi les bases de cette thèse pluridisciplinaire durant les deux premières années.

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire d'Études de Mécanique Sismique (EMSI) du Centre CEA de Saclay. Je tiens à remercier Catherine Berge-Thierry, le chef du laboratoire EMSI, pour sa présence d'esprit et pour m'avoir guidé, en tant que doctorant, vers l'ouverture scientifique et humaine.

Je tiens à remercier Madame Natalie Ribeiro (responsable DRH au niveau DANS) et Monsieur Jacques Sègre (conseiller scientifique au niveau DM2S) pour leur soutien et conseils lors de nos réunions. Significatif, le financement de la part du CEA pour la quatrième année m'a facilité la tâche de mener au bout ma mission de formation doctorale.

Parmi le collectif du laboratoire EMSI je tiens à remercier Pierre-Etienne Charbonnel pour la lecture attentive d'une bonne partie de mon mémoire de thèse et à Cyril Feau pour son sourire accueillant du matin et son attitude d'optimisme. Au laboratoire EMSI, j'ai particulièrement apprécié les liens d'amitié créés entre les doctorants, mes collègues : Laurent Moutoussamy et Ejona Kishta (un grand merci

pour m'avoir aidé avec l'organisation du pot à la fin de la soutenance), Quentin Desbonnets, Romain Crambuer, Phuong Tran, Charlie Mathey (merci Charlie pour m'avoir aidé surtout au début de la rédaction du mémoire de thèse pour améliorer le niveau de français écrit). Merci pour vos discussions enrichissantes lors de nos trajets à pied vers le restaurant 3 et pendant nos déjeuners.

Ayant le statut de doctorant j'ai connu une triple hiérarchie : en plus du CEA, j'aimerais remercier Monsieur Silviu-Iulian Niculescu (chef du laboratoire L2S à SUPELEC) pour m'avoir accueilli dans son équipe, et à Madame Véronique Vèque (directrice de l'École Doctorale STITS) pour ses conseils positifs.

Mes remerciements vont aussi à mes parents Gheorghe et Gherghina Teodorescu, ma famille. Mon émotion est forte quand je pense à ma mère et aux moments parfois douloureux, qu'elle a accepté de partager avec moi ces quatre dernières années. Merci maman pour ton amour maternel inconditionnel et pour m'avoir aidé à construire mon équilibre émotionnel, pour ta patience et pour ta persévérance.

Permettez-moi de finir par quelques enseignements vécus pendant mes années de thèse, exprimés dans un langage qui m'est familier :

*Car il n'y a pas pour l'homme, demeuré libre, de souci plus constant, plus cuisant que de chercher un être devant qui s'incliner. Mais il ne veut s'incliner que devant une force incontestée, que tous les humains respectent par un consentement universel.*

F. Dostoïevski, Les Frères Karamazov, vol. 1.

*Negative feedback is what stabilizes us.*

E. Lavretsky, Congrès IFAC 2011, Milan, Italie.

*Unul făcând un lucru la arătare bun, vatămă pe aproapele său ; iar altul nefăcând un asemenea lucru, îl ajută cu gândul.*

Philocalie (version roumaine), vol. 1, Marc l'Ascète, Deux cents chapitres sur la loi spirituelle, paragraphe 37.

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>19</b>
<b>1 État de l'art</b>	<b>23</b>
1.1 Introduction . . . . .	23
1.2 Motivations et problématique . . . . .	26
1.3 Problème de contrôle semi-actif . . . . .	29
1.3.1 Critère de performance . . . . .	29
1.3.2 La formulation du problème . . . . .	30
1.3.3 Utilisation des représentations temps-fréquence . . . . .	32
1.4 Objectifs . . . . .	34
1.5 État de l'art . . . . .	35
1.5.1 Systèmes d'isolation sismique au niveau de la base . . . . .	35
1.5.2 Capteurs . . . . .	37
1.5.3 Modèles de structures à plusieurs degrés de liberté . . . . .	42
1.5.4 Signaux sismiques naturels et artificiels . . . . .	46
1.5.5 Schémas de contrôle . . . . .	54
1.5.6 Travaux antérieurs . . . . .	65
1.6 Liste de publications et communications orales . . . . .	72
1.7 Synthèse . . . . .	72
<b>2 Modélisation</b>	<b>75</b>
2.1 Structures sismiquement isolées à la base. Systèmes d'isolation mixte	76
2.1.1 Structures non linéaires à $n$ DDL . . . . .	77
2.1.2 1 <sup>er</sup> modèle à 2 DDL . . . . .	87
2.1.3 2 <sup>e</sup> modèle à 2 DDL . . . . .	91
2.2 Analyse temps-fréquence de signaux sismiques . . . . .	96
2.3 Représentation de signaux sismiques . . . . .	99
2.3.1 1 <sup>re</sup> classe : signaux générés par une méthode stochastique connue . . . . .	100
2.3.2 2 <sup>e</sup> classe : signaux polychromatiques . . . . .	103
2.3.3 3 <sup>e</sup> classe : signaux générés par l'équation différentielle partielle (EDP) du problème de propagation d'onde . . . . .	107
2.3.4 Prise en compte de modèles de perturbations sur des schémas de contrôle . . . . .	116
2.4 Synthèse . . . . .	117
<b>3 Synthèse de commandes</b>	<b>119</b>
3.1 Contrôle actif . . . . .	119
3.1.1 Un résultat qui surprend . . . . .	119
3.1.2 Loi de commande active de Leitmann . . . . .	121

3.2	Contrôle semi-actif . . . . .	124
3.2.1	Contrôle semi-actif de type Leitmann . . . . .	124
3.2.2	Prise en compte de modèles de signaux sismiques . . . . .	143
3.2.3	Vers l'emploi d'outils temps-fréquence pour la commande optimale . . . . .	145
3.3	Preuve du théorème 3.1 . . . . .	152
3.4	Preuve du théorème 3.2 . . . . .	154
3.5	Preuve du corollaire 3.3 . . . . .	157
3.6	Preuve du corollaire 3.4 . . . . .	159
	<b>Conclusions et Perspectives</b>	<b>163</b>

# Table des figures

1.1	Réacteur nucléaire Jules Horowitz du Centre CEA de Cadarache actuellement en construction . . . . .	24
(a)	Schéma du réacteur avec ses appuis parasismiques visibles dans la partie inférieure, CEA, 2005, CEA, 2011 . . . . .	24
(b)	Appuis parasismiques réels, Cahiers, 2011 . . . . .	24
(c)	Appuis parasismiques réels, Pecker, 2010a . . . . .	24
1.2	Deux types de structure : à gauche une conventionnelle encastrée dans le sol, et à droite une autre protégée contre les séismes par un système d'isolation mixte . . . . .	25
1.3	Spectre de plancher souhaité . . . . .	28
1.4	Spectres de plancher au niveau de la base sur une structure à 2DDL sismiquement isolée par divers types d'appuis parasismiques, pour illustrer le conflit entre déplacements relatifs au niveau de la base (le premier pic) et les accélérations absolues au niveau de la superstructure (les autres pics) sur des systèmes d'isolation passive . . . . .	29
(a)	Appuis élastomère . . . . .	29
(b)	Pendule de frottement . . . . .	29
1.5	Diagramme bloc du système . . . . .	32
1.6	Analyse des signaux d'entrée et de sortie d'un système dynamique avec contrôle . . . . .	33
(a)	en entrée : le signal sismique artificiel Cadarache n° 1. Au centre : la DWVL où $T = 2$ , $\Omega = 2$ . . . . .	33
(b)	en sortie : l'accélération absolue de la base sur une structure à 2 degrés de liberté. Au centre : la DWVL où $T = 2$ , $\Omega = 2$ . . . . .	33
1.7	Excitation sismique des structures, Gibert, 1988, Fig. 20.7 . . . . .	38
1.8	Schéma avec les positions d'un hypocentre et de deux stations sismiques, sur une carte en $\mathbb{R}^2$ et leurs systèmes de coordonnées cartésiennes . . . . .	41
(a)	système d'axes $Oxy$ . . . . .	41
(b)	système d'axes $O'x'y'$ . . . . .	41
1.9	Identification des coordonnées d'un hypocentre $u$ , par la méthode des hyperboles. Les solutions sont situées à l'intersection des hyperboles en $\mathbb{R}^2$ , et hyperboloides en $\mathbb{R}^3$ , respectivement . . . . .	42
(a)	solution unique, dans l'espace $\mathbb{R}^2$ . . . . .	42
(b)	solution unique, dans l'espace $\mathbb{R}^3$ . . . . .	42
(c)	solution non unique, dans l'espace $\mathbb{R}^2$ . . . . .	42
1.10	Schémas de réduction de modèle : (a) modèle initial à $N$ DDL ; (b) $N$ oscillateurs mis en parallèle ; (c) modèle réduit à 1 DDL . . . . .	44
1.11	Signal sismique Tōhoku (Fukushima) enregistré par la station FKSH19, le 2011/03/11 à 14h46m38s . . . . .	47
1.12	Analyse du signal sismique Kobé . . . . .	53



(a)	normalisé. Au centre : la DWV . . . . .	53
(b)	normalisé et tourné. Au centre : la DWV . . . . .	53
1.13	Schéma de contrôle d'un système asservi . . . . .	54
1.14	Schéma de contrôle mixte feedforward-feedback . . . . .	58
1.15	Schéma bloc avec les opérations nécessaires pour calculer le spectre de plancher en pseudo-accélération au niveau de la base d'une structure linéaire à 2 DDL de type masse-ressort-amortissement . . . . .	66
1.16	Diagramme de Bode de la fonction de transfert (1.11) d'une structure linéaire à deux degrés de liberté sismiquement isolée au niveau de la base par des dispositifs passifs de type raideur-amortisseur fixe . . . . .	67
1.17	Spectres de plancher au niveau de la base pour un taux d'amortissement $\zeta = 2\%$ . Structures à 2 DDL sismiquement isolées au niveau de la base par un système d'isolation mixte qui diffèrent par le dispositif semi-actif utilisé . . . . .	69
(a)	dispositif semi-actif de type amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable . . . . .	69
(b)	dispositif semi-actif de type patin à frottement sec à forcé normale variable . . . . .	69
2.1	Schéma d'une structure sismiquement isolée au niveau de la base par un système d'isolation mixte : passif et semi-actif, dont la partie semi-active est assurée par un amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement $c_A(t)$ variable . . . . .	77
2.2	Schéma d'une structure à 2 DDL en mouvement horizontal et de ses coordonnées. La structure est sismiquement isolée à l'aide d'un système d'isolation mixte : passif (raideur et amortisseur visqueux fixe) et semi-actif (amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable) . . . . .	90
(a)	Coordonnées relatives . . . . .	90
(b)	Coordonnées absolues . . . . .	90
2.3	Schéma d'une structure à 2 DDL en mouvement horizontal et de ses coordonnées. La structure est sismiquement isolée à l'aide d'un système d'isolation mixte : passif (raideur et patin à frottement sec) et semi-actif (amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable) . . . . .	91
(a)	Coordonnées relatives . . . . .	91
(b)	Coordonnées absolues . . . . .	91
2.4	Modèles de la force de frottement . . . . .	92
2.5	DWVs du signal sismique (normalisé) El Centro . . . . .	96
2.6	DWVLs du signal sismique (normalisé) El Centro. $T = \sqrt{2}$ , $\Omega = \sqrt{2}$ . . . . .	97
2.7	DWVLs du signal sismique (normalisé) El Centro. $T = \sqrt{2}$ , $\Omega = 2\sqrt{2}\pi$ . . . . .	97
2.8	Signal sismique artificiel n°1 généré à partir du spectre de sol de référence du site de Cadarache . . . . .	102
(a)	Accélérogramme . . . . .	102
(b)	spectres de réponse du sol, pour un taux d'amortissement $\zeta = 5\%$ . . . . .	102
2.9	Signal sismique artificiel n°2 généré à partir du spectre de sol de référence du site de Cadarache . . . . .	102
(a)	Accélérogramme . . . . .	102
(b)	spectres de réponse du sol, pour un taux d'amortissement $\zeta = 5\%$ . . . . .	102
2.10	Signal sismique artificiel n°3 généré à partir du spectre de sol de référence du site de Cadarache . . . . .	102

(a) Accélérogramme . . . . .	102
(b) spectres de réponse du sol, pour un taux d'amortissement $\zeta = 5\%$ . . . . .	102
2.11 Signal sismique réel Kobe $y(t)$ ; son approximation initiale $\tilde{y}(t)$ cf. (2.33), donnée par la somme de 3 termes du type (2.31); l'écart de ces deux courbes $\varepsilon(t)$ . . . . .	106
2.12 DWVsa du signal $\tilde{y}(t)$ cf. (2.33) . . . . .	106
2.13 Signal sismique réel Kobe $y(t)$ ; la solution finale $\tilde{y}(t)$ cf. (2.35) issue de l'algorithme d'optimisation; l'écart de ces deux courbes $\varepsilon(t)$ . . . . .	106
2.14 DWVsa de la solution finale $\tilde{y}(t)$ cf. (2.35), issue de l'algorithme d'optimisation . . . . .	107
2.15 DWVsa de l'écart $\varepsilon(t)$ à la fin de l'optimisation . . . . .	107
2.16 $\Phi_\alpha(t, r)$ cf. (2.38); $\alpha = -1 + 12j$ ; $c = 1$ . . . . .	109
2.17 Domaine espace-temps $\bar{\Omega}_r \times \mathbb{R}_{\geq 0}$ pour la mise en œuvre du schéma numérique. Discrétisation en espace. . . . .	112
2.18 Évolution de $\Phi(r, t)$ cf. (2.40) où $s(r, t) \equiv 0$ ; $\Phi_{t_0}(r) \equiv 0$ ; $\Psi_{t_0}(r) \equiv 0$ ; $\Phi_0(t) = \mathbb{J}_{\Delta r}(0) e^{-\zeta_0 \omega_0 t} \cos \omega_0 \sqrt{1 - \zeta_0^2}$ ; $\omega_0 = 4\pi$ ; $\zeta_0 = 0.1$ ; $\Phi_L(t) \equiv 0$ ; $L = 10$ ; $N = 100$ ; $\Delta r = L/(N + 1)$ ; $c = 1$ . . . . .	115
2.19 Signal sismique réel Kobé $y(t)$ et son approximation $\tilde{y}(t)$ cf. (2.45), donnée par la somme de 4 termes; $\varepsilon(t)$ est l'écart de ces deux courbes . . . . .	115
3.1 Spectres de plancher au niveau de la base pour une structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d'appuis parasismiques et sa réponse au signal sismique artificiel n° 1 . . . . .	120
(a) Appui en élastomère . . . . .	120
(b) Pendule de frottement . . . . .	120
3.2 Illustration de la propriété [P2] du théorème 3.2, propriété qui repose sur <i>uniform ultimate boundedness</i> . . . . .	126
3.3 Borne supérieure garantie sur l'ensemble des spectres de plancher . . . . .	130
3.4 Diagramme bloc pour illustrer les entrées et les sorties du spectre calculé au niveau de la base d'une structure isolée . . . . .	132
3.5 Spectres de plancher au niveau de la base : structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d'appuis parasismiques et sa réponse aux plusieurs signaux sismiques artificiels . . . . .	136
(a) Appui en élastomère; signal sismique artificiel n° 1 . . . . .	136
(b) Pendule de frottement; signal sismique artificiel n° 1 . . . . .	136
(c) Appui en élastomère; signal sismique artificiel n° 2 . . . . .	136
(d) Pendule de frottement; signal sismique artificiel n° 2 . . . . .	136
(e) Appui en élastomère; signal sismique artificiel n° 3 . . . . .	136
(f) Pendule de frottement; signal sismique artificiel n° 3 . . . . .	136
3.6 Comparaison de forces au niveau de la base : structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d'appuis parasismiques en réponse au signal sismique artificiel n° 1 . . . . .	137
(a) appui en élastomère . . . . .	137
(b) pendule de frottement . . . . .	137
3.7 Spectres de plancher au niveau de la base : structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d'appuis parasismiques et sa réponse à plusieurs signaux sismiques artificiels . . . . .	139
(a) Appui en élastomère; signal sismique artificiel n° 1 . . . . .	139
(b) Pendule de frottement; signal sismique artificiel n° 1 . . . . .	139
(c) Appui en élastomère; signal sismique artificiel n° 2 . . . . .	139

	(d) Pendule de frottement ; signal sismique artificiel n° 2 . . . . .	139
	(e) Appui en élastomère ; signal sismique artificiel n° 3 . . . . .	139
	(f) Pendule de frottement ; signal sismique artificiel n° 3 . . . . .	139
3.8	Comparaison de forces au niveau de la base : structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d'appuis parasismiques en réponse au signal sismique artificiel n° 1 . . . . .	140
	(a) appui en élastomère . . . . .	140
	(b) pendule de frottement . . . . .	140
3.9	Fonction coût $J_{T,\Omega} = J_{T,\Omega}(k)$ cf. (3.27) ; système en boucle fermée constitué des équations (3.23) et (3.24) . . . . .	148
3.10	Fonction coût $J_{T,\Omega} = J_{T,\Omega}(k)$ cf. (3.27) ; système en boucle fermée constitué des équations (3.23) et (3.24) . . . . .	148
3.11	Fonction coût $J_{T,\Omega} = J_{T,\Omega}(k)$ cf. (3.27) analysée sur un domaine plus large que celui indiqué sur l'axe des abscisses des figures 3.9 et 3.10 ; $k_{LQR}^* = -2.0488$ ; système en boucle fermée constitué des équations (3.23) et (3.24) . . . . .	149
3.12	Fonction coût $J_{T,\Omega} = J_{T,\Omega}(k)$ cf. (3.27) ; système en boucle fermée constitué des équations (3.23) et (3.24) . . . . .	149
3.13	Allure des fonctions coût $J_{T,\Omega}(k_1, k_2)$ cf. (3.22) pour un système linéaire de deuxième ordre en boucle fermée (3.29)-(3.30), contrôlé par $u = (k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$ . . . . .	151
	(a) fonctions coût . . . . .	151
	(b) zoom sur la figure de gauche autour de $K_{LQR}^*$ . . . . .	151
	(c) Analyse de la stabilité en boucle fermée dans le plan $(k_1, k_2)$ : bleu=zone stable, rouge=zone instable . . . . .	151
	(d) Analyse du cas particulier où $k_1 \equiv 0$ et donc $u = k_2 \dot{x}$ . . . . .	151

# Liste des tableaux

1.1	Notations dans l'espace $\mathbb{R}^2$ : coordonnées géométriques, distances, temps d'arrivée. . . . .	40
1.2	Quelques signaux sismiques indicatifs utilisés pour valider en simulation des schémas de contrôle actif et semi-actif . . . . .	57
1.3	Classification des méthodes de contrôle actif pour la protection des structures en génie parasismique . . . . .	60
1.4	Classification des méthodes de contrôle semi-actif pour la protection des structures en génie parasismique . . . . .	63
2.1	Organisation des propriétés des matrices $M$ , $K$ et $C$ selon 4 « situations », d'un cas simple à un cas général, ce avec une idée de contrôle spécifique . . . . .	80
2.2	Modèle de calcul numérique pour les structures à 2 DDL étudiées. Paramètres du spectre de plancher. Les unités de mesure sont cohérentes <sup>4</sup> entre elles. . . . .	87
2.3	[Partie I.] Description de la dynamique de la structure isolée à 2 DDL (avec amortissement) illustrée dans la figure 2.2, mise sous la forme du système (2.27) et ses coordonnées . . . . .	88
2.4	[Partie II.] Description de la dynamique de la structure isolée à 2 DDL (avec amortissement) illustrée dans la figure 2.2, mise sous la forme du système (2.27) et ses coordonnées . . . . .	89
2.5	Correspondance entre $\xi_b$ et $\mu$ . . . . .	93
2.6	Description de la dynamique de la structure isolée à 2 DDL (avec frottement) illustrée dans la figure 2.3, mise sous la forme du système (2.27) et ses coordonnées . . . . .	94
2.7	[Partie II.] Description de la dynamique de la structure isolée à 2 DDL (avec frottement) illustrée dans la figure 2.3, mise sous la forme du système (2.27) et ses coordonnées . . . . .	95
2.8	Analyse quantitative des résultats, avant et après l'optimisation. . . . .	105
3.1	Choix des paramètres de la loi de commande semi-active . . . . .	135
3.2	Choix des paramètres de la loi de commande semi-active . . . . .	140



# Liste des notations

Ensembles	
$\mathbb{R}, \mathbb{R}_{\geq 0}, \mathbb{R}_{> 0}$	ensemble des nombres réels, réels positifs et réels strictement positifs, respectivement
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres complexes
$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels
Matrices	
$M$	matrice de masse
$C, C_c$	matrices d'amortissement
$K$	matrice de rigidité
$1_n$	matrice identité
$0_n$	matrice carrée de dimension $n \times n$ où tous les coefficients sont nuls
$\Xi$	matrice diagonale constituée de valeurs propres
$\mathcal{V}, \mathcal{W}$	matrices complexes de changement de base constituées par des vecteurs propres de droite, et de gauche, respectivement
$(P, Q)$	paire de matrices définies positives, reliées par l'équation algébrique de Riccati
$A, B(x), D$	matrices modélisant la dynamique du processus, celle de l'actionneur semi-actif et la contribution de la perturbation au sein du processus, respectivement
Grandeurs vectorielles	
$z_r, \dot{z}_r, \ddot{z}_r$	coordonnées physiques relatives en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$z_a, \dot{z}_a, \ddot{z}_a$	coordonnées physiques absolues en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$q_r, \dot{q}_r, \ddot{q}_r$	coordonnées généralisées relatives en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$q_a, \dot{q}_a, \ddot{q}_a$	coordonnées généralisées absolues en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$q_{cr}, \dot{q}_{cr}, \ddot{q}_{cr}$	coordonnées modales complexes ( <i>i.e.</i> , $\in \mathbb{C}$ ) relatives en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$q_{ca}, \dot{q}_{ca}, \ddot{q}_{ca}$	coordonnées modales complexes ( <i>i.e.</i> , $\in \mathbb{C}$ ) absolues en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement

$u$	force (vocabulaire du mécanicien) et, plus généralement, loi de commande active (vocabulaire de l'automaticien)
$c_A$	coefficient d'amortissement variable (vocabulaire du mécanicien) et, plus généralement, loi de commande semi-active (vocabulaire de l'automaticien)
$c_A^{\min}, c_A^{\max}$	bornes sur la loi de commande inférieure et supérieure, respectivement
$x$	vecteur des variables d'état
$x_0$	condition initiale pour le vecteur des variables d'état
$\nu$	perturbation, voire le signal sismique
$1_{n \times 1}$	vecteur de dimension $n$ où tous les coefficients sont 1
$0_{n \times 1}$	vecteur de dimension $n$ où tous les coefficients sont 0
$e_i$	vecteur orthonormé où tous ses coefficients sont 0 à part le $i^{\text{ème}}$ qui vaut 1
$(\omega_i, \varphi_i)$	paire de pulsations propres $\omega_i$ et vecteurs propres de droite associés au problème aux valeurs propres généralisé et symétrique défini positif, où l'indice $i = 1, \dots, n$
$(\lambda_i, \varphi_{ci})$	paire de valeurs propres $\lambda_i$ et vecteurs propres complexes ( <i>i.e.</i> $\in \mathbb{C}$ ) de droite $\varphi_{ci}$ , où l'indice $i = 1, \dots, n$
$(v_i, w_i)$	paire de vecteurs propres de droite $v_i$ , et de gauche $w_i$ , où l'indice $i = 1, \dots, n$

---



---

Grandeurs scalaires

---

$N$	nombre de degrés de liberté du modèle complet de la structure isolée
$n$	nombre de degrés de liberté du modèle réduit de la structure isolée
$t$	temps
$g$	accélération terrestre gravitationnelle
$\nu, \omega = 2\pi/\nu$	fréquence, et pulsation, respectivement
$\nu_i,$ $\omega_i = 2\pi/\nu_i$	$i^{\text{ème}}$ fréquence propre, et pulsation propre du modèle la structure, respectivement
$\xi_b, \nu_b, \omega_b$	taux d'amortissement, fréquence propre, et pulsation propre d'un oscillateur à 1 DDL, respectivement
$\Delta\xi_b$	taux d'amortissement additionnel
$\xi_t$	taux d'amortissement total
$\xi_s, \nu_s, \omega_s$	taux d'amortissement, fréquence propre, et pulsation propre associées au premier mode de vibration d'une structure sans ( <i>i.e.</i> avant d'ajouter) l'isolation sismique entre la base et le sol
$c_b, k_b$	coefficients d'amortissement, et raideur situées entre la base et le sol (caractéristiques de la partie passive du système d'isolation mixte), respectivement
$c_s, k_s$	coefficients d'amortissement, et raideur situées entre la base et la superstructure (caractéristiques de la structure sans isolation), respectivement
$m_b, m_s$	masse de la base, et de la superstructure, respectivement
$\gamma_m$	rapport des masses

$\gamma_1, \gamma_2$	paramètres de réglage de la loi de commande, utilisés pour pénaliser la contribution du premier et deuxième mode de vibration, respectivement
$\mu, \mu^{\min}, \mu^{\max}$	coefficient de frottement de Coulomb et ses valeurs minimale et maximale, respectivement
$F_N, F_N^{\min}, F_N^{\max}$	force normale au niveau du patin à frottement sec (qui appartient à la partie passive du système d'isolation mixte), sa valeur minimale, et maximale, respectivement
$F_{fr}$	force de frottement au niveau du patin à frottement sec (qui appartient à la partie passive du système d'isolation mixte)
$v_{fr}$	vitesse maximale de glissement à partir de laquelle la force de frottement reste constante
$x_i$	composante $i$ du vecteur des variables d'état d'un système d'équations différentielles ordinaires
$z_{ri}, \dot{z}_{ri}, \ddot{z}_{ri}$	coordonnée relative à l'étage $i$ en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$z_{ai}, \dot{z}_{ai}, \ddot{z}_{ai}$	coordonnée absolue à l'étage $i$ en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$z_{ai}^{\max}, \dot{z}_{ai}^{\max}, \ddot{z}_{ai}^{\max}$	valeur maximale de la coordonnée absolue à l'étage $i$ en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$q_{ri}, \dot{q}_{ri}, \ddot{q}_{ri}$	$i^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée relative en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$q_{ai}, \dot{q}_{ai}, \ddot{q}_{ai}$	$i^{\text{ème}}$ coordonnée généralisée absolue en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$q_{cri}, \dot{q}_{cri}, \ddot{q}_{cri}$	$i^{\text{ème}}$ coordonnée modale complexe ( <i>i.e.</i> , $\in \mathbb{C}$ ) relative en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$q_{cai}, \dot{q}_{cai}, \ddot{q}_{cai}$	$i^{\text{ème}}$ coordonnée modale complexe ( <i>i.e.</i> , $\in \mathbb{C}$ ) absolue en déplacement, vitesse, et accélération, respectivement
$x_g, \dot{x}_g, \ddot{x}_g$	déplacement, vitesse, et accélération horizontale absolue du sol, respectivement
$\ddot{x}_g^{\max}$	valeur maximale de l'accélération horizontale absolue du sol, <i>i.e.</i> , <i>peak ground acceleration</i>
$\zeta$	taux d'amortissement sous-critique utilisé pour le calcul du spectre de plancher
$\delta_{ij}$	symbole de Kronecker
$\delta(\cdot)$	distribution de Dirac
$\mathbb{1}(\cdot)$	fonction porte
$\text{sign}(\cdot)$	fonction signe
$\sigma(\cdot)$	fonction de régularisation de la fonction signe
$\tanh(\cdot)$	fonction tangente hyperbolique
$\mathcal{O}(\cdot)$	notation grand O, utilisée pour caractériser le comportement asymptotique des fonctions
$j$	nombre imaginaire, où $j^2 = -1$
$s$	variable de Laplace, où $s = j\omega$



Opérations et opérateurs	
$L_p, L_2, L_\infty$	normes
$\lambda_{\min}(Q),$ $\lambda_{\max}(Q)$	la plus petite et la plus grande valeur propre de la matrice $Q$ à valeurs propres réels, respectivement
$', z'$	transposition et transposé de la variable complexe $z$ , respectivement
$-, \bar{z}$	conjugaison et conjugué de la variable complexe $z$ , respectivement
$*, z^*$	transconjugaison et transconjugué (c'est-à-dire transposé et conjugué) de la variable complexe $z$ , respectivement
$\Re(z)$	partie réelle de la variable complexe $z$
$\Im(z)$	partie imaginaire de la variable complexe $z$
$\times$	multiplication
$*$	produit de convolution
$\text{diag}(\cdot)$	matrice diagonale ayant sur la diagonale principale les valeurs indiquées entre les parenthésés
$\ x\ , \ x\ _\infty$	norme euclidienne et norme infini du vecteur $x$
$L_f V(x)$	dérivée de Lie
Acronymes	
VSS	<i>Variable Structure Systems</i>
CP	Contrôle passif
LDRB	<i>Low Damping Rubber Bearings</i> , appuis élastomères à faible amortissement
CSA	Contrôle semi-actif
AVS	<i>Active Variable Stiffness</i>
FCSB	<i>friction-controllable sliding bearings</i>
CA	Contrôle actif
AMD	<i>Active Mass Damper/Driver</i>
ATMD	<i>Active-Controlled Mass Damper</i>
HMD	<i>Hybrid Mass Damper</i>
DDL	Degré de liberté
1D, 2D, 3D	une, deux, et trois dimensions, respectivement
PGA	<i>Peak Ground Acceleration</i>
PSA	Pseudo-accélération
SRO	Spectre de réponse de l'oscillateur
ESD	Densité Spectrale d'Énergie
DSP	Densité Spectrale de Puissance
DWV	Distribution de Wigner-Ville
DWVsa	Distribution de Wigner-Ville calculée à partir d'un signal analytique
DWVL	Distribution de Wigner-Ville Lissée
DWVLsa	Distribution de Wigner-Ville Lissée calculée à partir d'un signal analytique
SLIT	Système linéaire invariant dans le temps
MIMO	<i>Multiple-Input Multiple-Output</i>
EDO	Équations différentielles ordinaires

EDP	Équations différentielles partielles
UGAS	Uniformément Globalement Asymptotiquement Stable
LQR	Commande linéaire quadratique
CEA	Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives, <a href="http://www.cea.fr">www.cea.fr</a>
DEN	Direction de l'Énergie Nucléaire
DANS	Direction déléguée aux Activités Nucléaires de Saclay, <a href="http://den-dans.extra.cea.fr">den-dans.extra.cea.fr</a>
DM2S	Département de Modélisation des Systèmes et Structures
SEMT	Service d'Etudes Mécaniques et Thermiques
EMSI	Laboratoire d'Études de Mécanique Sismique, <a href="http://www-tamaris.cea.fr">www-tamaris.cea.fr</a>
CNRS	Centre National de la Recherche Scientifique, <a href="http://www.cnrs.fr">www.cnrs.fr</a>
L2S	Laboratoire des Signaux et Systèmes, <a href="http://www.lss.supelec.fr">www.lss.supelec.fr</a>
UPS	Université Paris-Sud, <a href="http://www.u-psud.fr">www.u-psud.fr</a>
ASN	Autorité de sûreté nucléaire, <a href="http://www.asn.fr">www.asn.fr</a>
IAEA	<i>International Atomic Energy Agency</i>
FEMA	<i>Federal Emergency Management Agency</i>
PEER	<i>Pacific Earthquake Engineering Research Center</i>
RAP	Réseau Accélérométrique Permanent
RFS	Règle Fondamentale de Sûreté
SI	Système international d'unités
EO, NS	Est-Ouest et Nord-Sud, respectivement
Ox, Oy, Oz	système d'axes orthogonales dans un espace à trois dimensions
EWS	Système d'alerte avancée ( <i>Early Warning System</i> )
$M-C-K$	(représentation de systèmes de type) masse-amortissement-raideur

---



---

Abréviations

---

Hz	Hertz
s, sec	seconde
<i>vs</i>	<i>versus</i>
pp.	page
Thm.	Théorème
Fig.	Figure
eq.	équation
cf.	conformément à
not.	notation



# Introduction

L'isolation sismique par la base est une méthode efficace pour protéger les structures (par exemple, bâtiments et équipements) contre les effets adverses des séismes. Son principe consiste à découpler partiellement le mouvement de la structure de celui du sol par l'intermédiaire de divers systèmes de contrôle. Les solutions de *contrôle passif* (par exemple, des appuis souples en élastomère, pendule de frottement, etc.) actuellement utilisées dans l'industrie, et les solutions de *contrôle semi-actif* (par exemple, les amortisseurs visqueux à coefficient variable, réglé par l'ouverture/fermeture d'une vanne) font de nos jours l'objet d'études et de recherches. En particulier, ces derniers ont l'avantage de permettre à l'utilisateur de régler en temps-réel certaines caractéristiques de ces dispositifs et ainsi d'améliorer les performances dynamiques de la structure isolée. Employées conjointement, ces solutions de contrôle constituent les *systèmes d'isolation mixte*, qui sont au cœur de ces travaux de recherche.

Ce mémoire de thèse s'articule autour de trois parties.

Dans la première, nous formaliserons un problème de contrôle semi-actif ayant pour cible l'amélioration du spectre de plancher, qui constitue notre unique critère d'évaluation de performance. En effet, le spectre de plancher est une donnée clé permettant de caractériser l'entrée sismique ainsi que son effet dommageant sur les structures.

Ce problème de contrôle semi-actif est issu de la pratique courante et d'un besoin spécifique de l'ingénieur en génie parasismique. Par ce choix particulier, on se place dans la continuité des travaux de recherche de [Politopoulos et Pham, 2011](#). La principale difficulté sera de concilier deux objectifs : (i) réduire les déplacements relatifs au niveau de la base de la structure isolée, mais aussi (ii) réduire les accélérations absolues au niveau des étages supérieurs, ce qui induit une réduction des efforts au niveau des équipements placés à l'intérieur de la structure isolée. Ces demandes peuvent être exprimées qualitativement à l'aide du spectre de plancher, et se trouvent en conflit l'une par rapport à l'autre si l'on utilise des moyens de contrôle passif (largement répandues en industrie). D'où l'intérêt scientifique dans nos travaux d'utiliser des dispositifs plus sophistiqués comme les dispositifs semi-actifs, et de vérifier que ceux-ci contribuent à améliorer les performances dynamiques pour l'isolation des structures. Après avoir décrit le problème nous dressons un état de l'art qui couvrira notamment les travaux de recherche des communautés scientifiques du *contrôle de structures* et du *génie parasismique* en lien avec notre problème. Notamment, une rétrospective des diverses méthodes de synthèse de lois de commande est effectuée et les résultats sont classés chronologiquement dans des tableaux. Ces derniers permettront dans un deuxième temps de justifier notre propre approche du problème de contrôle comparée à celle de la littérature.

La deuxième partie est dédiée à la modélisation. Nous présenterons successivement :

- (i) des modèles réduits de structures à  $n$  degrés de liberté. Nous exposerons en détail plusieurs façons de représenter leur dynamique, à partir des coordonnées physiques et des coordonnées généralisées ou modales, par rapport aux repères relatif (*i.e.*, non inertiel) et absolu (*i.e.*, inertiel). Au vu du problème de contrôle, il y a un intérêt certain quant à utiliser les coordonnées généralisées ou modales pour pouvoir influencer localement, autour de chaque fréquence propre de vibration de la structure isolée, l'allure des spectres de plancher. En particulier, pour les structures à  $n = 2$  degrés de liberté, nous détaillerons deux types de système d'isolation mixte dont : (A) la partie semi-active sera constituée d'un amortisseur à coefficient variable (qui définira la loi de commande dans le chapitre suivant) , tandis qu'ils diffèrent au niveau de (B) la partie passive, composée soit d'appui en élastomère, soit de pendule de frottement. Plus précisément, la partie passive diffère par le dispositif de dissipation d'énergie qui sera soit un amortisseur fixe, soit un patin à frottement sec. Ce dernier introduira des non-linéarités dans la dynamique du système.
- (ii) des modèles de signaux sismiques artificiels. Une méthode stochastique connue, [Gibert, 1988](#), §20.5.6, est utilisée pour générer des signaux à partir d'un spectre de sol donné. Ensuite, deux méthodes déterministes de génération des fonctions de base seront exposées : la première famille de fonctions de base est constituée de signaux monochromatiques mis dans une enveloppe gaussienne, tandis que la seconde famille sera constituée d'une famille de signaux, solutions de l'équation différentielle partielle de l'onde. En sommant un nombre fini de ces fonctions de base paramétrées, il est possible d'approcher des signaux issus d'événements sismiques naturels historiques. Les deux types de modèle déterministe ont une propriété intéressante pour l'automatique : leur dynamique peut être décrite par des systèmes d'équations différentielles ordinaires facilitant leur intégration dans la construction de lois de commande par l'augmentation du vecteur d'état et du système contrôlé. Afin de se familiariser avec les outils d'analyse temps-fréquence, et notamment la distribution de Wigner-Ville (DWV) très connue dans le domaine du traitement du signal, mais très rarement utilisée en automatique et en génie parasismique, nous avons effectué l'analyse de plusieurs signaux sismiques naturels et artificiels. L'interprétation directe des résultats illustrés dans le plan temps-fréquence est difficile, notamment à cause des termes d'interférence. Nous verrons que ces derniers peuvent être réduits par le calcul de la DWV à partir du signal analytique et par la convolution dans le plan temps-fréquence avec des gaussiennes.

Après la modélisation, la troisième partie est consacrée à l'étude de schémas de contrôle. Partant des travaux de [Kelly et al., 1987](#) qui proposent une méthode de *contrôle actif* sur des systèmes d'isolation mixte au niveau de la base (il s'agit d'un des premiers articles sur ces problématiques), notre contribution a été de reprendre le cadre mathématique et de l'adapter pour résoudre des problèmes de *contrôle semi-actif*. Dans un premier temps, nous avons effectué un travail théorique concrétisé et formalisé par un théorème de contrôle robuste non linéaire. En utilisant une version modifiée de la loi de commande de Leitmann et de ses collaborateurs, [Leitmann, 1979](#), [Corless et Leitmann, 1981](#), nous avons vérifié deux

propriétés souvent étudiées en automatique pour ce type de problème, à savoir *uniform boundedness* et *uniform ultimate boundedness*. Puis, nous avons montré qu'il est possible d'exprimer une borne sur le spectre de plancher, par deux corollaires. Ce ne sont pas des outils directement applicables par l'ingénieur : les résultats concernant les bornes sur les variables d'état (*i.e.* boules dans le plan de phase) et celles des spectres de plancher sont calculés et garantis dans les cas les plus pessimistes en termes d'incertitudes à la fois sur le modèle mais aussi par rapport aux perturbations (à savoir le signal sismique) ; ainsi ce résultat est très conservatif, calculé avec des hypothèses très pénalisantes. Après avoir détaillé ce travail théorique, nous en présenterons une application. Les outils de la théorie des vibrations, dont notamment la décomposition modale, sont utilisés afin de : (i) définir les variables d'état du système, et (ii) calibrer astucieusement les paramètres de la loi de commande reprise du théorème proposé, ceci afin de pénaliser la contribution de chaque mode de vibration au mouvement total de la structure. Les résultats de simulations sur des modèles réduits à 2 degrés de liberté et utilisant les signaux artificiels montrent des améliorations sur les spectres de plancher par rapport aux dispositifs passifs.

Cette dernière partie s'achève par une tentative d'étendre la méthode de synthèse de lois de commande linéaire optimale (LQR, en anglais), très connue en automatique, par l'utilisation de fonctions coût définies en temps-fréquence. Les propriétés d'intégrales marginales de la DWV permettent de généraliser les critères quadratiques habituels utilisés comme des fonctions coût. Initialement, cette étude a été motivée par une meilleure prise en compte des caractéristiques transitoires des signaux entrée-sortie de systèmes dynamiques. Par un calcul théorique et numérique, il est possible d'illustrer le fait que ces fonctions critère sont non convexes et qu'elles possèdent plusieurs minima locaux, qui imposent un travail de régularisation supplémentaire non présenté dans ce manuscrit.

Enfin, des conclusions de l'étude réalisée sont tirées pour préciser les apports des travaux menés et les perspectives de recherches futures.



# Chapitre 1

## État de l’art

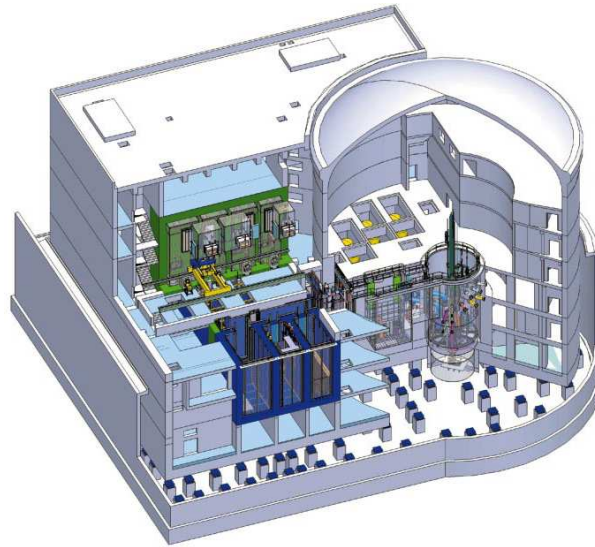
### 1.1 Introduction

Le risque sismique implique la nécessité de protéger à la fois les structures et leurs équipements internes sensibles. La protection parasismique est un sujet d’actualité mis en lumière par des événements sismiques récents, par exemple, au Japon le séisme de mars 2011 de la côte Pacifique du Tōhoku, le séisme de l’Aquila en Italie en 2009, Northridge en 1994 en Californie aux États-Unis. Plusieurs thématiques du génie parasismique sont couramment étudiées à travers le monde et sont appliquées au génie civil, au génie civil nucléaire et à l’industrie nucléaire. Dans le cadre de cette thèse on s’intéresse à la méthode de l’isolation sismique, appliquée aux installations nucléaires. Cela consiste à filtrer l’excitation sismique à l’aide de dispositifs spécifiques, répartis à certains endroits entre le sol et la base de la structure isolée.

Dans cette thèse on s’intéresse principalement aux systèmes d’isolation mixte (également appelé hybride) qui consistent à combiner les dispositifs passifs avec les dispositifs semi-actifs ou actifs. Habituellement, les solutions de contrôle associées aux systèmes (ou dispositifs) d’isolation sismique sont classées en trois groupes. Par ordre de complexité croissante de mise en œuvre on a :

- contrôle passif (CP) : ces dispositifs sont couramment utilisés dans les applications réelles. En France, on peut mentionner le réacteur Jules Horowitz actuellement en construction au CEA Cadarache, superstructure qui repose entièrement sur un ensemble assez complexe d’appuis parasismiques – voir la [figure 1.1](#). D’autres exemples utilisent des appuis élastomères souples (ou flexibles) et des plaques de friction. Ces dispositifs seront repris dans cette thèse.
- contrôle semi-actif (CSA) : par rapport aux dispositifs précédents, ceux-ci ont des caractéristiques physiques qui peuvent varier au fil du temps et donc être réglées en temps-réel par des lois de commande. Des exemples de dispositifs incluent l’amortisseur visqueux à coefficient d’amortissement variable, qui sera utilisé dans ces travaux de thèse, et le frotteur à force normale variable. De nos jours, les solutions de contrôle semi-actif sont encore au stade de la recherche.
- contrôle actif (CA) : il s’agit de la solution la plus coûteuse en terme d’énergie pour assurer son fonctionnement. En pratique, cela revient à utiliser des vérins, dispositifs qui ont la capacité à la fois de dissiper mais aussi d’apporter de l’énergie aux structures. Quelques applications réelles existent dans des pays affectés par les séismes, au Japon, [Nishitani, 1998](#), et aux États-Unis dans la région de Los Angeles.





(a) Schéma du réacteur avec ses appuis parasismiques visibles dans la partie inférieure, [CEA, 2005](#), [CEA, 2011](#)



(b) Appuis parasismiques réels, [Cahiers, 2011](#)



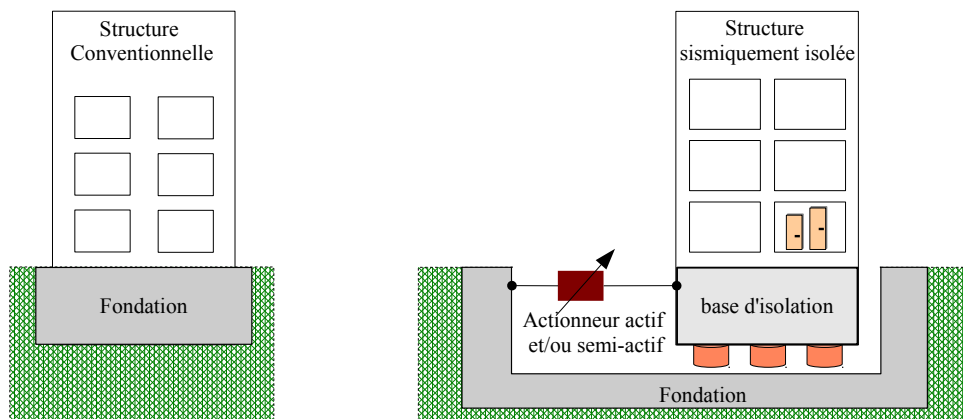
(c) Appuis parasismiques réels, [Pecker, 2010a](#)

**Figure 1.1** – Réacteur nucléaire Jules Horowitz du Centre CEA de Cadarache actuellement en construction

Le principe de l'isolation sismique au niveau de la base (voir la [figure 1.2](#)) consiste à découpler le mouvement du sol du mouvement de la structure. En d'autres termes, lors d'un tremblement de terre, la structure devrait idéalement rester immobile par rapport à un repère fixe dans l'espace (repère absolu ou inertiel). En pratique, ce découplage idéal n'est pas possible : il y aura toujours une partie de l'énergie du séisme qui sera transmise à la superstructure à travers les dispositifs d'isolation sous forme de vibration.

La majeure partie de l'énergie d'un séisme est regroupée dans une bande de fréquence de 2 à 10 Hz. Si la fréquence fondamentale d'une structure encastrée au sol (voir la [figure 1.2](#)) se situe dans cet intervalle, elle risque de subir une excitation conséquente. À cet égard, l'ajout de système d'isolation sismique *passif*, par exemple en insérant des appuis souples, aura comme effet de réduire la fréquence fondamentale de la structure jusqu'à des valeurs typiquement situées en dessous de 0.5 Hz, et ainsi protéger efficacement la structure. En effet, par ce type d'isolation sismique la réponse du premier mode propre de vibration sera améliorée de façon significative par rapport à la structure encastrée. En revanche, il se peut que dans certains cas les modes propres de vibration d'ordre supérieur, également appelés modes *non-isolés*, seront excités de façon significative. C'est justement à

cette problématique que cette thèse s'intéresse et essaie d'apporter des solutions.



**Figure 1.2** – Deux types de structure : à gauche une conventionnelle encastrée dans le sol, et à droite une autre protégée contre les séismes par un système d'isolation mixte

Les avantages liés à l'utilisation de systèmes d'isolation sont multiples : par rapport aux structures conventionnelles, ces solutions sont plus sûres et plus performantes. Typiquement, les efforts exercés sur la structure isolée sont réduits de 3 à 10 fois par rapport au cas de la même structure non isolée par des moyens d'isolation sismique passive. L'isolateur filtre les accélérations et notamment les hautes fréquences grâce à sa capacité de se déformer et donc de tolérer des déplacements au niveau de la base de la structure isolée.

En contrepartie, l'inconvénient principal est d'ordre économique : par rapport aux structures conventionnelles, l'utilisation des systèmes d'isolation sismique est plus coûteuse, aussi bien pendant la phase d'étude (recherche), que pendant la construction et même l'exploitation. Malgré le bénéfice sur la réduction du risque sismique, des questions sur le retour de l'investissement restent ouvertes.

## La transversalité de ces travaux de recherche

Cette thèse en automatique contient un ensemble de travaux de recherche pluridisciplinaires où les composantes de la mécanique et du génie parasismique (dynamique des structures, la théorie des vibrations) et le traitement du signal (outils d'analyse en temps-fréquence) seront aussi présents. L'équipe constituée par le doctorant et ses encadrants (CEA, CNRS et UPS) couvre ces champs de compétence. La thèse a débuté en octobre 2009 sous financement propre du CEA.

Le sujet et le travail effectués se situent à mi-chemin entre recherche scientifique et recherche appliquée. On manipule des concepts et des fonctions de base partant d'un besoin défini par l'ingénieur. Les résultats qui seront présentés dans ce mémoire de thèse sont très en amont par rapport aux possibles produits finaux.

Face aux problématiques souvent très complexes rencontrées dans la vie réelle, une sélection et une découpe en sous-problèmes ont été faites au préalable, notamment à travers les travaux [Politopoulos et Pham, 2011](#), [Pham, 2010](#). Dans la continuité de ces derniers, le style pour guider les études et l'approche scientifique ont été de définir un cadre suffisamment simple et accessible dans le sens où :

- (i) les modèles mathématiques utilisés sont simples, mais capables de reproduire les phénomènes physiques essentiels d'intérêt : par exemple, les applications traitées

- seront des structures idéalisées à deux degrés de liberté où l'actionneur sera un amortisseur visqueux assimilé à une simple force d'amortissement ;
- (ii) on cherche à formaliser les résultats et assurer un passage souple du particulier au général et du général au particulier : les théorèmes proposés couvrent un champ d'applications plus large mais en particulier ils répondent aux besoins des applications ciblées ;
  - (iii) l'analyse et la synthèse mathématique (par exemple, en utilisant la théorie de Lyapunov) sont guidées par la compréhension et l'intuition des phénomènes physiques des processus : par exemple, le paramétrage des lois de commande se fait en terme de pénalisation des modes de vibration.

## 1.2 Motivations et problématique

Des limites en performance des systèmes d'isolation sismique *passifs* sont connues depuis plusieurs décennies, les premiers travaux datent des années 1960. Notamment, dans certaines situations, la réponse sismique de ces systèmes souffre d'une dégradation de performance qui se traduit par une accumulation importante de contenu spectral pour les hautes fréquences. Ce phénomène se traduit par des efforts importants s'exerçant au niveau de la superstructure et qui vont impacter, entre autres, la tenue des équipements. Très souvent mentionné dans la littérature du génie parasismique, il y a un *compromis* à assurer entre : (i) les valeurs maximales du déplacement relatif (par rapport à un point fixe sur le sol) de la base de la structure isolée, et (ii) les accélérations absolues (par rapport à un point fixé dans l'espace, non-solidaire au sol) maximales au niveau des étages supérieurs. En d'autres termes on retrouve un *conflit* entre deux objectifs contradictoires, si on demande simultanément de réduire les déplacements relatifs au niveau de la base aussi bien que les accélérations absolues au niveau de la superstructure, quelle que soit la sollicitation sismique. Ce constat constitue le point de départ de ces travaux de thèse. Peut-on surmonter ce conflit et si oui, comment ?

Le principe des systèmes d'isolation passifs consiste à accroître la flexibilité dans la direction horizontale (parallèle au sol) de l'isolateur passif, d'où la réduction de la fréquence fondamentale de vibration. En conséquence, il faut tolérer des amplitudes plus importantes pour les déplacements relatifs au niveau de la base. Face aux séismes *forts* cette situation a, en pratique, plusieurs inconvénients : (i) si les valeurs de ces déplacements ont été sous-estimées lors des phases de conception ou dimensionnement, ce phénomène peut poser des problèmes d'instabilité des appuis (par exemple, flambage, roulement) ; (ii) dans certains cas, la structure isolée peut subir des chocs en cognant contre les bâtiments voisins. De plus, il est probable que la structure va réagir aux autres intempéries naturelles comme le vent fort (et se mettre en mouvement), ce qui n'est pas souhaité non plus. De l'autre côté, la problématique liée aux accélérations absolues importantes au niveau des planchers (c'est-à-dire les étages) de la structure isolée traduit : (i) des efforts importants pour les équipements qui sont posés ou fixés sur ces planchers ; (ii) pour la majorité des bâtiments du génie civil, des déplacements inter-étages grands au niveau de la superstructure, et donc la possibilité de sortir de la plage élastique des matériaux de construction. Au contraire, les bâtiments des centrales nucléaires sont, par construction, très solides et robustes, et donc moins concernés par les déplacements inter-étages. Dans cette situation, le principal bénéfice qu'on

peut attendre de l'isolation sismique est la protection des équipements, [Pham, 2010](#), §5. Enfin, pour toutes ces raisons, il est judicieux de chercher à réduire les deux quantités qui constituent ledit conflit.

Une alternative aux systèmes d'isolation passifs est d'utiliser des systèmes d'isolation *mixtes* (aussi appelés hybrides). Cette idée a été introduite vers la fin des années 1980, par exemple voir les travaux de [Kelly et al., 1987](#), [Reinhorn et al., 1987](#). En revanche, par rapport à ces travaux du début, combiner les dispositifs passifs (CP) avec les dispositifs semi-actifs au lieu des dispositifs actifs semble être une meilleure solution, principalement pour des raisons pratiques. Pour assurer leur fonctionnement, les dispositifs semi-actifs nécessitent une source d'énergie faible et des installations de dimensions et complexité réduites, comparés aux dispositifs actifs ; ils sont donc peu encombrants, fiables et de plus, ne souffrent pas de soucis d'instabilité liés au fonctionnement des dispositifs actifs, [Pujol et al., 2009](#), [Scruggs et Gavin, 2011](#), sachant qu'ils ne peuvent pas injecter de l'énergie supplémentaire de vibration. En résumé, les solutions de contrôle semi-actif (CSA) semblent préférables au contrôle actif (AC) pour des raisons de :

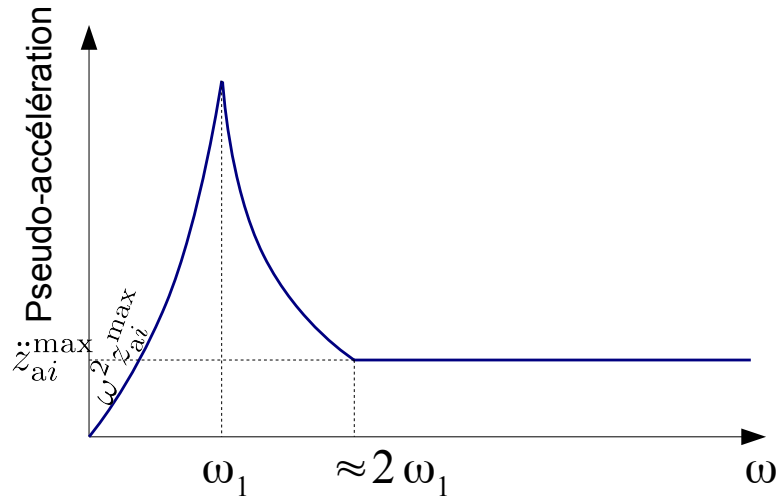
- sécurité et fiabilité : en cas de panne de la source principale d'énergie, une batterie d'accumulateurs pourrait être suffisante pour assurer leur bon fonctionnement. Si cette dernière n'existe pas, les performances de CSA sont similaires au CP
- les coûts d'opération et de maintenance sont négligeables par rapport au cas AC

En revanche, les solutions CSA et CA nécessitent l'une comme l'autre d'utiliser des mesures en temps-réel, à partir desquelles des décisions seront prises suivant les algorithmes de contrôle. L'instrumentation est un point commun et une étape nécessaire dans ces deux cas, qui les distinguent du CP où on n'a pas besoin de rajouter cette couche de complexité.

Peut-on améliorer la protection des structures sismiquement isolées et des équipements par des systèmes d'isolation mixtes ? Cette problématique est assez large et en particulier, d'autres questions surgissent : Comment quantifier et quel est le sens des améliorations attendues ?

Peu de travaux antérieurs sont consacrés à l'étude du comportement des équipements (ou structures internes). La majorité des références bibliographiques portent sur la structure isolée en terme de valeurs maximales de : (i) déplacements des nœuds de chaque étage ou inter-étages ; (ii) vitesses, accélérations ou forces des nœuds. Contrairement à ces travaux, dans cette thèse les équipements constituent la priorité. À cet égard, on se place dans la continuité des travaux de recherche de [Politopoulos et Pham, 2011](#), de la thèse de [Pham, 2010](#) et du stage de fin d'études de [Costa, 2010](#), où l'idée était d'utiliser explicitement les spectres de plancher en tant que critère de performance, pour caractériser le mouvement de la structure. Cet aspect constitue un point d'originalité de l'approche. La forme du spectre de plancher attendue dans le cas des structures isolées est illustrée dans la [figure 1.3](#). Ce spectre a plusieurs avantages : (i) simplifier les tâches de dimensionnement des équipements, [Politopoulos et Sollogub, 2005](#) ; (ii) réduire les efforts des équipements, notamment autour des fréquences propres supérieures de la structure isolée. Il a une forme particulièrement simple : un seul pic autour de la première pulsation propre  $\omega_1$  et un plateau au-delà d'une pulsation deux fois  $\omega_1$ . La valeur du plateau

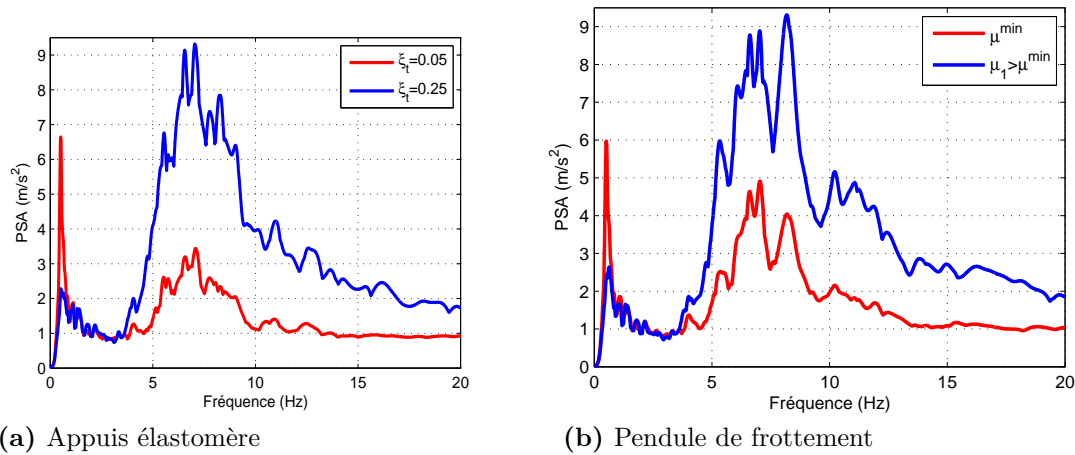
est donnée par l'accélération absolue maximale du plancher au niveau  $i$ , soit  $\ddot{z}_{ai}^{\max}$  ; proche de l'origine cette courbe est approchée par  $\omega^2 z_{ai}^{\max}$ , où  $z_{ai}^{\max}$  est le déplacement absolu du plancher au niveau  $i$ . Ces propriétés seront détaillées plus loin, sur la [page 50](#). Enfin, est-ce qu'on peut améliorer les spectres de plancher au sens défini par celui de la [figure 1.3](#) par des moyens physiques de contrôle semi-actif ou actif ?



**Figure 1.3** – Spectre de plancher souhaité

La non stationnarité des signaux sismiques et l'envie de mieux caractériser leur comportement transitoire, nous incite à utiliser des outils d'analyse temps-fréquence, dont la distribution de Wigner-Wille. De plus, ce serait intéressant de pouvoir utiliser ces outils lors de la *synthèse* de lois de commande, tout en espérant arriver à mieux générer les aspects transitoires des divers signaux (variables d'état, lois de commande, perturbations, etc.). Dans ce sens, il est à signaler que : (i) sur les schémas de contrôle connus (par exemple,  $\mathcal{H}_\infty$  et commande optimale), avant de faire la synthèse de la loi de commande, on peut augmenter la dynamique du processus contrôlé par des variables internes supplémentaires utilisées pour mieux gérer le contenu fréquentiel des perturbations. Souvent, cela revient à filtrer des signaux de bruit blanc afin de pouvoir mieux caractériser les perturbations d'entrée. À titre d'exemple, c'est ce qui est fait dans les travaux de [Narasimhan, 2004](#) en génie parasismique. Mais, soulignons que le signal sismique a des caractéristiques assez différentes par rapport au bruit blanc ou coloré (par exemple, obtenu en filtrant un bruit blanc par un filtre linéaire de second ordre, de type Kanaï-Tajimi). De plus, (ii) la plupart des méthodes de synthèse de lois de commande dites « classiques » (par exemple, Nyquist, Bode, fonction de transfert, etc.) reposent sur l'analyse du comportement des systèmes contrôlés en régime permanent. Ces méthodes sont utilisées en génie parasismique avec des résultats satisfaisants. Mais, il est judicieux de penser que le contrôleur devrait être sensibilisé aux caractéristiques transitoires du signal sismique (par exemple, l'onde primaire est moins forte et se propage plus vite par rapport à l'onde secondaire qui produit effectivement les dégâts au niveau de la structure isolée et de ses équipements).

À partir de ce qui a été dit plus haut, deux axes de recherche s'ouvrent : est-ce qu'on peut proposer des modèles de signaux sismiques suffisamment simples et représentatifs, qui devraient *a minima* prendre en compte certaines caractéristiques



**Figure 1.4** – Spectres de plancher au niveau de la base sur une structure à 2DDL sismiquement isolée par divers types d’appuis parasismiques, pour illustrer le conflit entre déplacements relatifs au niveau de la base (le premier pic) et les accélérations absolues au niveau de la superstructure (les autres pics) sur des systèmes d’isolation passive

(par exemple locales d’un site géographique précis : valeur maximale de l’accélération de sol, etc.) et ainsi s’en servir lors de la synthèse de lois de commande ? Est-ce par l’intégration de la distribution de Wigner-Ville dans une méthode (à proposer) de synthèse de lois de commande on peut gérer mieux les aspects transitoires du comportement du système, et en particulier de la structure sismiquement isolée ?

## 1.3 Problème de contrôle semi-actif

### 1.3.1 Critère de performance

Nous avons déjà évoqué dans la [section 1.2](#) pour des systèmes d’isolation *passive* l’existence d’un conflit entre deux objectifs contradictoires : assurer d’un côté (i) des valeurs maximales du déplacement relatif (par rapport à un point fixe sur le sol) de la base de la structure isolée, et de l’autre (ii) les accélérations absolues (par rapport à un point fixé dans l’espace, non-solidaire au sol) maximales au niveau des étages supérieurs. Ce *conflit* peut être traduit en termes de spectre de plancher comme indiqué dans les travaux de [Politopoulos et Pham, 2011](#), [Pham, 2010](#), §5. Par la suite, nous allons reprendre et détailler ces concepts qui constituent une limite en performance des dispositifs CP.

Expliquons simplement par les illustrations. Tout au long de ce mémoire nous allons nous conformer au format de la [figure 1.4](#) pour illustrer les résultats. Dans la [figure 1.4](#), plusieurs spectres de plancher en pseudo-accélération sont représentés. Ils sont calculés au niveau de la base de deux structures simples à 2 degrés de liberté, sismiquement isolées : sur la [figure 1.4a](#) l’isolateur est constitué par des appuis souples en élastomère (ceci dit, le système d’isolation est constitué par une paire raideur-amortisseur plus un amortissement additionnel), tandis que sur la [figure 1.4b](#) l’isolateur est constitué par un pendule de frottement (le système d’isolation est composé d’une paire raideur-frottement plus un frottement additionnel). Les modèles avec les paramètres correspondant à ces systèmes se trouvent dans les [sections 2.1.2](#) et [2.1.3](#), respectivement, sachant qu’il est nécessaire de remplacer le



dispositif semi-actif par lesdits dispositifs additionnels. Le signal sismique utilisé est celui de la [figure 2.8](#) page 102.

Pour diminuer les déplacements relatifs de la base qui pourront être jugés trop grands, deux solutions sont envisageables :

- (i) une solution consiste à augmenter graduellement le taux d'amortissement total entre la base et le sol  $\xi_t$  (qui varie avec l'amortissement additionnel). Dans la [figure 1.4a](#), des valeurs de plus en plus grandes de  $\xi_t$  traduisent une dissipation croissante de l'énergie mécanique accompagnée par des valeurs de plus en plus réduites des déplacements relatifs au niveau de la base : c'est l'interprétation du premier pic situé sur la première fréquence propre du système  $\nu_1 \approx 0.5$  Hz, qui a tendance à diminuer. En revanche, on observe une accumulation croissante du contenu spectral autour de la seconde fréquence propre  $\nu_2 \approx 6.8$  Hz qui devient de plus en plus importante au fur et à mesure que le paramètre  $\xi_t$  est augmenté. Si cette accumulation est considérée insatisfaisante, par exemple parce qu'elle est trop pénalisante pour les équipements, avec ce type de dispositif CP on n'a pas d'autre solution que de diminuer le paramètre  $\xi_t$ . En effectuant progressivement le chemin inverse on observe que le premier pic monte pour arriver enfin à la situation du départ. Pour résumer, il n'est pas possible par ces moyens de CP de réduire un pic sans augmenter l'autre. Naturellement, on se pose la question de savoir si cette observation s'applique uniquement à ce dispositif ou si elle a un caractère généralisable. D'où l'intérêt d'effectuer le même type d'analyse sur un autre dispositif passif.
- (ii) une seconde solution consiste à augmenter le coefficient de frottement  $\mu$  d'un patin à frottement sec situé entre la base et le sol. Dans la [figure 1.4b](#), deux valeurs de  $\mu$  sont considérées :  $\mu = \mu^{\min} > 0$  et  $\mu = \mu_1 > \mu^{\min}$ . En conclusion, on retrouve le même phénomène décrit un peu plus haut : pour des valeurs croissantes de  $\mu$ , le premier pic descend et l'ensemble des pics situés autour de la seconde fréquence propre de la structure isolée montent, et inversement : diminuer ces-derniers pics aura comme conséquence l'augmentation du premier pic.

Afin d'essayer de surmonter ce conflit, la solution ciblée dans le cadre de ces travaux de thèse a été d'utiliser des dispositifs d'isolation plus sophistiqués de type CSA. Les observations de ce paragraphe motivent la formulation du problème suivant.

### 1.3.2 La formulation du problème

Soit le système non linéaire, incertain, décrit par les équations différentielles ordinaires :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A(t)) x + f(x, \nu) + (B(x) + \Delta B(t, x, \nu)) c_A(t) + D \nu(t), \\ x(0) &= 0_{2n}, \end{aligned} \quad (1.1)$$

où le vecteur des variables d'état  $x(t) \in \mathbb{R}^{2n}$ , la loi de commande  $c_A(t) \in \mathbb{R}^m$ , les perturbations à énergie non finie  $\nu(t) \in \mathbb{R}^l$ , le vecteur des conditions initiales est  $x_0$ , et  $n, m, l \in \mathbb{N}$ . Les matrices  $A$  et  $D$  sont connues et constantes ;  $B$  est une fonction connue ; l'incertitude sur le modèle  $\Delta A$  et sur la dynamique des actionneurs  $\Delta B$ , respectivement, sont des fonctions matricielles partiellement inconnues ;  $f$  est une fonction connue. Sous les hypothèses :

- $A$  et  $A + \Delta A(t)$ ,  $\forall t \geq 0$  fixé, sont des matrices stables : l'origine du système  $\dot{x} = (A + \Delta A(t))x$  est asymptotiquement stable
- les caractéristiques temporelles et spectrales des perturbations  $\nu$  sont mal connues à l'avance
- $\nu$ ,  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  et  $f$  sont des fonctions continues par rapport à leurs arguments, et de plus elles sont bornées :

$$\begin{aligned} \nu : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{N}, \quad \Delta A : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathcal{M}, \quad \Delta B : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{P}, \\ f : \mathbb{R}^{2n} \times \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{F}, \end{aligned}$$

où  $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^l$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{2n \times 2n}$ ,  $\mathcal{P} \subset \mathbb{R}^{2n \times m}$  et  $\mathcal{F} \subset \mathbb{R}^{2n}$  sont des ensembles bornés et fermés (donc compacts). De plus,  $\mathcal{N}$ ,  $\mathcal{M}$  et  $\mathcal{P}$  sont partiellement inconnus.

Alors le but est d'effectuer la synthèse de lois de commande  $c_A$  qui sont :

- (i) robustes vis-à-vis des incertitudes  $\Delta A$  et  $\Delta B$  et les perturbations  $\nu$ ,
- (ii) capables d'assurer une amélioration des spectres de plancher en pseudo-accélération, amélioration définie au sens de l'allure indiquée dans la [figure 1.3](#) avec un premier pic et un plateau les plus faibles possibles.

Deux conditions de faisabilité doivent être respectées :

- les commandes sont bornées  $c_A(t) \in [c_A^{\min}, c_A^{\max}]$ , où les vecteurs constants  $c_A^{\min}, c_A^{\max} \in \mathbb{R}^m$ ,
- les actionneurs sont bornés en force  $|F(x, c_A)| \leq F^{\max}$ ,  $\forall x, \forall c_A$ .

Cette formulation permet de définir un cadre réaliste pour la résolution de problèmes de synthèse de lois de commande de type semi-actives pour des systèmes d'isolation mixte CP + CSA. Plus concrètement, dans le cadre de cette thèse :

- (i) l'actionneur de type semi-actif est un amortissement visqueux à coefficient d'amortissement  $c_A$  qui sera traité en tant que loi de commande ;
- (ii) les variables d'état  $x$  peuvent être des coordonnées relatives, absolues, modales ou toute autre quantité, pourvu que l'objectif d'améliorer les spectres de plancher soit atteint ;
- (iii) les perturbations  $\nu$  représentent le signal sismique par une de ses composantes horizontales en déplacement, vitesse et/ou accélération ;
- (iv) la matrice  $A$  est construite à partir des matrices de masse  $M$ , d'amortissement fixe  $C$  et de rigidité  $K$  ;
- (v)  $f$  est utilisé pour modéliser les efforts non linéaires du patin à frottement sec.

Pour nuancer les points-clés et mettre l'accent sur l'apport de l'approche proposée dans cette thèse par rapport à la littérature, faisons quelques observations :

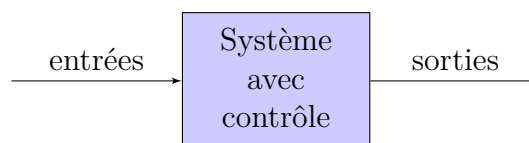
- (i) en utilisant le langage courant de l'automatique, nous avons un problème d'atténuation de perturbations où l'évaluation du schéma de contrôle se fait par rapport à un critère de performance qui est donné par le spectre de plancher. Insistons sur le fait qu'on ne traite pas de problèmes de *stabilisation* : le système (1.1) est naturellement stable ;
- (ii) en vue de la synthèse de lois de commande, le critère utilisé dans ce problème est assez difficile à prendre en compte sachant qu'on ne peut pas effectuer un passage vers les normes standard, avec lesquelles on a l'habitude de travailler en automatique : (i)  $L_2$ ,  $L_\infty$ ,  $H_2$ ,  $H_\infty$ , ou (ii) des normes pondérées, par exemple des fonctions quadratiques pondérées, etc. ;



- (iii) on cherche des lois de commande qui seront capables de prendre en compte dès la phase de synthèse : (i) la double contrainte sur l'actionneur ; (ii) les incertitudes de modèle et les caractéristiques des signaux d'excitation. En d'autres termes, contrairement à l'approche habituelle qui consiste à négliger dans un premier temps tous ces éléments, afin d'effectuer la synthèse de lois de commande sur le système nominal, et ensuite dans un second temps, analyser *a posteriori* le comportement en boucle fermée, on aimerait dans nos travaux intégrer ces informations dès le début ;
- (iv) si on enlève toutes les incertitudes, et même les perturbations, on se retrouve face à un système non linéaire  $\dot{x} = Ax + B(x)c_A$ . Ces systèmes sont parfois appelés bilinéaires, [Bruni et al., 1974](#). Enfin, cette observation nous incite à partir à la recherche de lois de commande *non linéaires* plutôt que de linéariser, par exemple par la technique très souvent utilisée de linéarisation tangente, [Coron, 2007](#), Def. 3.1, § 3, [Miller et Michel, 2007](#), pp. 169, [Khalil, 2002](#), § 4.3, [Hespanha, 2009](#), § 2.

### 1.3.3 Utilisation des représentations temps-fréquence

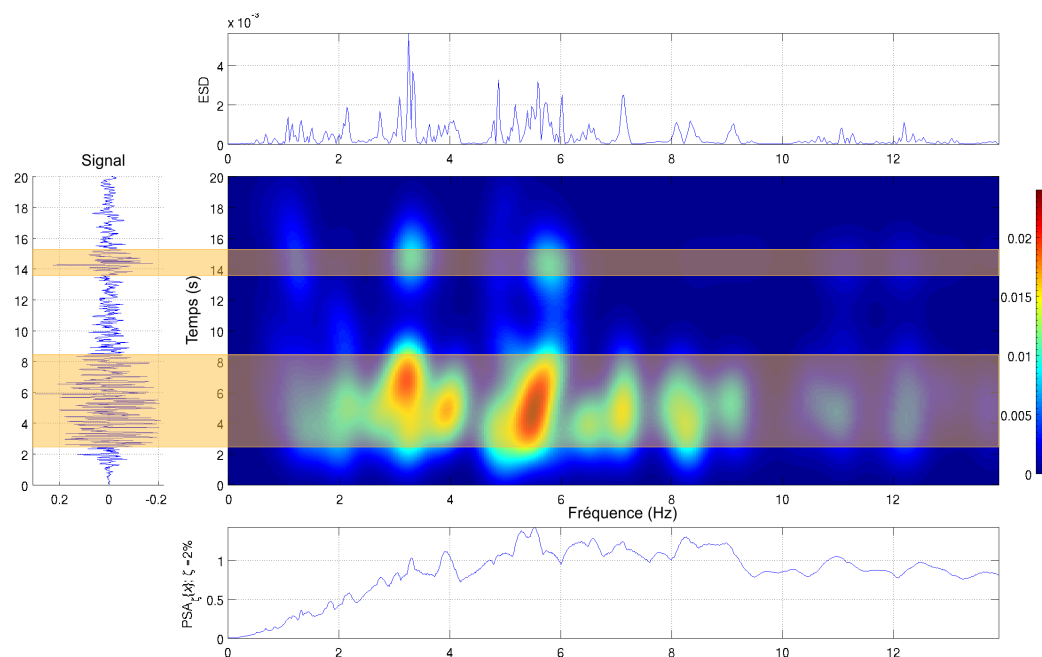
Une piste étudiée dans ces travaux de recherche porte sur l'utilisation des outils d'analyse temps-fréquence (couramment rencontrés dans le domaine du traitement du signal) pour résoudre des problèmes de synthèse de lois de commande (qui relèvent du domaine de l'automatique). Il s'agit d'un travail très exploratoire et peu de recherches sur ce sujet se trouvent dans la littérature. Les applications ciblées sont toujours les systèmes de contrôle d'isolation mixte (en génie parasismique). Pour illustrer le concept sur un schéma fonctionnel où l'on met un seul bloc qui représente un système avec contrôle ayant des *entrées* et des *sorties* (voir la [figure 1.5](#)) on espère pouvoir prendre en compte dès la phase de synthèse du contrôleur les composantes transitoires de ces signaux. En d'autres termes, on part à la recherche d'une méthode de synthèse de lois de commande portant sur une relation entrée-sortie<sup>1</sup> d'un système, relation qui devrait porter sur le *régime transitoire*.



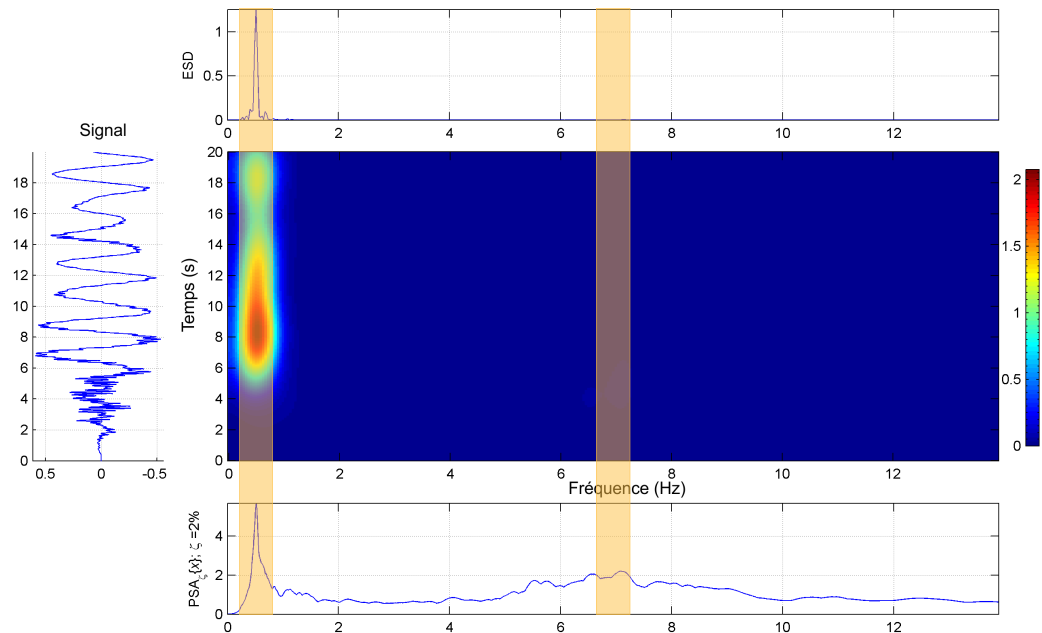
**Figure 1.5** – Diagramme bloc du système

La [figure 1.6a](#), divisée en quatre sous-figures, porte sur l'analyse d'un signal sismique (constituant l'*entrée* du bloc système) représenté sur la partie gauche de cette figure. Deux bandes horizontales de couleur orange sont à remarquer, qui ont été représentées par dessus pour ainsi repérer et *isoler* la partie forte de ce signal. On va les appeler « bandes temporelles » parce qu'elles ont été tracées à partir d'une information dans le domaine temps du signal. Elles concentrent la majorité de l'énergie du signal : les taches qui varient de jaune à rouge sont porteuses d'information sur la distribution de Wigner-Ville lissée, correspondant à la partie centrale de la figure. Elles renseignent sur des zones où le signal a un contenu important en temps et en fréquence, respectivement.

1. en anglais : input-output behavior, [Scruggs et Gavin, 2011](#), §30.4.2



(a) en entrée : le signal sismique artificiel Cadarache n° 1. Au centre : la DWVL où  $T = 2$ ,  $\Omega = 2$



(b) en sortie : l'accélération absolue de la base sur une structure à 2 degrés de liberté. Au centre : la DWVL où  $T = 2$ ,  $\Omega = 2$

**Figure 1.6** – Analyse des signaux d'entrée et de sortie d'un système dynamique avec contrôle

Il est à noter que les modèles de structures (par exemple bâtiments, équipements, etc.) ne vont pas réagir de la même façon sur toute la longueur du spectre. Pour nuancer la réponse à la secousse de la [figure 1.6a](#) et mettre en évidence la sensibilité d'une structure à deux degrés de liberté, sismiquement isolée par des dispositifs passifs, nous avons analysé dans la [figure 1.6b](#) l'accélération absolue de la base (constituant la *sortie* du bloc système). Les deux « bandes fréquentielles » verticales de couleur orange qui ont été superposées sont d'ailleurs centrées sur les deux fréquences propres de la structure. En effet, on peut lire sur la distribution de Wigner-Ville lissée une accumulation importante de contenu spectral autour de ces deux fréquences.

Enfin, par l'intersection de ces bandes horizontales et verticales, qui ont été appelées plus haut « bandes temporelles » et « bandes fréquentielles », on trouve dans le domaine temps-fréquence des régions (ou pavés) où on aimerait que le contrôleur soit capable d'induire un certain comportement en boucle fermée : par exemple, réduire cette énergie. Il est raisonnable de penser que cette réduction aura comme conséquence l'amélioration souhaitée des spectres de plancher.

## 1.4 Objectifs

Rappelons que cette thèse s'inscrit dans la thématique de l'isolation sismique : améliorer le comportement des structures sismiquement isolées au niveau de la base, à l'aide de systèmes d'isolation mixte, en mettant l'accent sur la tenue des équipements. Le critère de performance utilisé pour juger la qualité en boucle fermée est constitué par le spectre de plancher en pseudo-accélération, ce qui distingue ces travaux de la majorité de ceux effectués auparavant. C'est un travail de recherche théorique, une première phase d'étude sur la longue chaîne qui devrait aboutir à des produits et technologies matures.

L'objectif principal est d'effectuer la synthèse de lois de commande robustes, non linéaires, de type actif et semi-actif (on vise prioritairement ces dernières) qui doivent tenir compte dès la phase de synthèse du contrôleur des caractéristiques :

- des actionneurs : par exemple, limites physiques maximales en force et de divers paramètres qui peuvent varier au fil du temps
- de la structure isolée, par exemple en terme de modes de vibration et faire le lien avec les spectres de plancher

et tout ça, malgré les incertitudes sur :

- la structure et les actionneurs
- les signaux sismiques, en terme de date d'arrivée, contenu temporel et fréquentiel, intensité, durée, etc.

Plusieurs objectifs secondaires lui sont associés :

1. Intégrer les outils de l'analyse vibratoire (modes de vibration, vecteurs et valeurs propres généralisés, coordonnées modales réelles et complexes, etc.) lors de la synthèse de lois de commande : justifier le choix des variables d'état et paramètres de la loi de commande. Montrer le lien avec la réduction des spectres de plancher.
2. Prendre en compte l'effet des signaux sismiques lors de la conception de schémas de contrôle. Plusieurs cas sont possibles : (i) les traiter en tant que perturbations, situation où ces signaux sont supposés être inconnus ; (ii) les mesurer, par exemple

à l'aide des accéléromètres mis au pied de la structure, sur le sol. Proposer des modèles fiables de signaux sismiques qui devraient être capables de prendre en compte certaines caractéristiques (par exemple, locales d'un site géographique précis, dont la valeur maximale de l'accélération de sol).

3. Analyser les signaux sismiques par des outils fréquentiels (dont la transformée de Fourier et le spectre de réponse de l'oscillateur) et d'autres beaucoup moins souvent rencontrés en génie parasismique de type temps-fréquence (dont la distribution de Wigner-Ville) et étudier la possibilité d'intégration de la distribution de Wigner-Ville dans une méthode (à proposer) de synthèse de lois de commande. Le bénéfice attendu est de pouvoir mieux gérer les aspects transitoires du comportement du système, et en particulier de la structure sismiquement isolée.

4. Chercher des méthodes capables de calculer des lois de commande semi-actives en une seule étape. Ceci dit, contrairement à la majorité des travaux que l'on trouve dans la littérature, on cherche à éviter de passer par une étape intermédiaire qui consiste à calculer une loi de type active et ensuite essayer de l'approcher au mieux par les moyens physiquement disponibles.

5. Valider en simulation les schémas de contrôle proposés pour tenir compte de plusieurs réalisations de signaux sismiques.

## 1.5 État de l'art

### 1.5.1 Systèmes d'isolation sismique au niveau de la base

L'objectif de cette sous-section est de présenter de façon très succincte les divers types de dispositifs qui sont couramment utilisés dans la protection sismique (voire les dispositifs passifs) et d'autres qui sont à l'étude et proposés pour les installations futures (comme les dispositifs semi-actifs). Les détails de conception dépassent le but et le cadre de ces travaux de thèse, et les paragraphes suivants ont été introduits pour que le lecteur non averti puisse se faire une première idée sur ces dispositifs. Sinon, en dehors des grandes lignes présentées par la suite, on guide le lecteur vers les références indiquées.

**Dispositifs passifs** Dans [Soong et Constantinou, 1994](#), ces dispositifs sont classés par rapport à deux fonctions :

- d'isolation : par exemple, des appuis élastomères simples (à faible amortissement), plaques de friction à coefficient de frottement faible (plaques horizontales en acier superposées, avec une couche en téflon, au niveau de la surface de contact des deux ; le téflon permettra et facilitera l'effet de glissement),
- de dissipation de l'énergie sismique : par exemple par divers types d'amortisseurs dont ceux :
  - (i) visqueux, dispositifs idéalisés capables de générer des forces  $F = c_A \dot{z}_{r1}^\alpha$ , où  $c_A$  est le coefficient d'amortissement,  $\dot{z}_{r1}$  est une vitesse relative, et le coefficient  $\alpha \in [10^{-1}, 1]$ , [Dion et al., 2011](#), [Inman, 2001](#), §1.3 ;
  - (ii) de chocs, où  $\alpha \in (1, 2]$ , [Dion et al., 2011](#) ;
  - (iii) hystérétiques.

Dans la pratique actuelle, il est possible de combiner ces deux fonctions et de les retrouver dans un seul dispositif. C'est le cas des appuis élastomères à fort amortissement, appuis élastomères à noyau en plomb, pendules de frottement simples ou doubles, Fenz et Constantinou, 2006, isolation par alliages à mémoire de forme, boîtes à ressorts. Le lecteur pourra se référer à Pham, 2010, §2, Soong et Constantinou, 1994, Kelly, 1997, Erkus et Johnson, 2006, Narasimhan *et al.*, 2008, Dupont *et al.*, 1997, pour plus de détails.

**Dispositifs actifs** Les dispositifs les plus courants pour des structures de masse importante sont les vérins hydrauliques. Le fonctionnement de ces dispositifs Merritt, 1967, Soong et Constantinou, 1994, Manring, 2005, § 6, nécessite des installations complexes ayant besoin d'une source d'énergie considérable, ce qui limite leur applicabilité et mise en œuvre en dehors des études de recherche expérimentale. Au moment où nous écrivons nous n'avons trouvé des exemples concrets de structures réelles ayant implanté ce type de dispositifs dans le cadre de systèmes d'isolation mixte au niveau de la base. En revanche, ils sont actuellement utilisés, pour d'autres types/technologies de systèmes d'isolations mis au dernier étage d'une structure à protéger, notamment contre le vent : (i) *Active Mass Damper/Driver* (AMD), Soong, 1990, §5.2, (ii) *Active-Controlled Mass Damper* (ATMD), (iii) *Hybrid Mass Damper* (HMD). Une autre technologie consiste en *Active Tendon Systems* (ATS), Soong, 1990, §5.1. Par exemple, au Japon il y avait plus de 20 bâtiments en 1998, Nishitani, 1998, Nishitani, 2000, Nishitani et Inoue, 2001 qui mettaient en œuvre ce type de systèmes pour protéger des bâtiments civils contre les secousses sismiques. Voir aussi les détails techniques sur ces dispositifs dans Soong et Constantinou, 1994.

**Dispositifs semi-actifs** Commençons par présenter quatre groupes représentatifs : dispositifs de type hydraulique, électro-rhéologique, magnéto-rhéologique, et à base de frottement.

Les dispositifs semi-actifs de type hydraulique sont accessibles sous forme de dispositifs industriels commercialisés. On parle couramment d'amortisseurs à fluide, Soong et Constantinou, 1994. Ce sont essentiellement des dispositifs passifs dont on peut changer les caractéristiques en actionnant une vanne de contrôle. En d'autres termes, le circuit de l'huile est contrôlé par une ou plusieurs servo-valves qui sont réglées en temps-réel. On retrouve aussi des valves de sûreté qui vont empêcher l'accumulation trop importante de pression dans le circuit, un accumulateur et un réservoir d'huile. Voir par exemple, Shih *et al.*, 2004, Kurino *et al.*, 2004. En dehors du génie parasismique, ces dispositifs sont présents dans d'autres domaines comme le ferroviaire, Wang et Xu, 2009, et l'automobile, Poussot-Vassal *et al.*, 2011, Savaresi *et al.*, 2010.

Le fluide électro-rhéologique (ER) est un type de matériau dont les propriétés d'amortissement et de raideur peuvent varier en temps-réel, selon le champ électrique qui lui est appliqué, Larson, 1999, §8.2. Une caractéristique de ces dispositifs à base de fluide ER est qu'on peut modéliser la relation entre un signal électrique d'entrée  $v \geq 0$  (exprimé en volts) et les propriétés de raideur  $k$  et amortissement  $c$  par des fonctions linéaires, Leitmann et Reithmeier, 1995 :

$$k(v) = k_0 + k_1 v; \quad c(v) = c_0 + c_1 v$$

où  $k_0$ ,  $k_1$ ,  $c_0$  et  $c_1$  sont des constantes réelles positives.

Un exemple concret de ce type d'actionneur se trouve dans [Makris et al., 1996](#).

Une autre caractéristique attirante est le temps de réponse assez court, typiquement de l'ordre de  $10^{-5}$  à  $10^{-4}$  secondes, [Leitmann, 1994](#), [Leitmann et Reithmeier, 1995](#), entre le moment de l'envoi d'une consigne de variation du champ électrique et la réponse du matériau. C'est pourquoi, effectivement, ce temps de retard peut être négligé lors de la synthèse de lois de commande. Cette rapidité du temps de réponse des dispositifs à base du fluide ER n'est pas présente dans le cas des dispositifs conventionnels de type hydrauliques et électro-mécaniques, ni pour les dispositifs à base du fluide magnéto-rhéologique.

Le principe de fonctionnement du fluide magnéto-rhéologique (voir par exemple, [Pham, 2010](#), §6, [Larson, 1999](#), §8.3, [Preumont, 2002](#), § 12) est similaire au fluide électro-rhéologique avec la différence que le matériau réagit aux variations de champ magnétique au lieu du champ électrique. Plusieurs avantages sont à mentionner par rapport aux dispositifs électro-mécaniques : (i) ils supportent des efforts de cisaillement d'un ordre de grandeur supérieur, (ii) la plage de la température de fonctionnement est plus grande, et (iii) ils sont beaucoup moins affectés par les impuretés au contact du fluide. Par contre, le temps de retard est bien supérieur : par exemple, dans le cas du dispositif fabriqué par la compagnie LORD étudié dans le cadre de la thèse de [Pham, 2010](#), §6, de l'ordre de 50 millisecondes. De plus, par des essais de traction-compression il a été observé que cette valeur varie par rapport à l'amplitude de la variation du signal d'entrée de façon non linéaire. Voir aussi l'étude de [Koo et al., 2006](#) sur ce sujet. D'autres dispositifs de ce type sont présentés dans [Choi et Lee, 2001](#), [Pawlac, 2007](#), §6.3.2, [Preumont, 2002](#), §12.3.

Des dispositifs semi-actifs à base de frottement qu'on peut citer :

- *friction-controllable sliding bearing* (FCSB) qui consiste en des plaques de frottement en acier inoxydable avec une couche en téflon entre les deux et en une chambre à fluide mise sous pression, [Fend et al., 1992](#). La force de frottement générée par le dispositif dépend de la force normale, sachant que celle-ci peut être variée en modifiant la pression du fluide. La relation entre la force de frottement et la pression du fluide est également mentionnée dans [Yang et al., 1994](#), §2. Ces dispositifs sont décrits dans d'autres travaux, par exemple dans [Soong et Constantinou, 1994](#), §XV et repris dans [Pham, 2010](#), §2.3.1.
- *semi-active variable friction* (SAIVF), [Narasimhan, 2004](#), §6.2

**Systèmes d'isolation mixte (ou hybride)** Consistent à combiner :

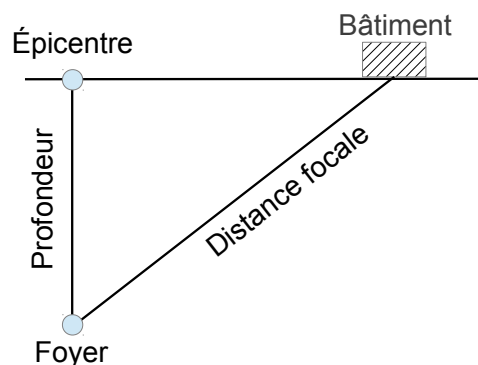
- (i) les dispositifs passifs aux dispositifs actifs. Voir par exemple, [Kelly et al., 1987](#).
- (ii) les dispositifs passifs aux dispositifs semi-actifs. Voir par exemple, [Pham, 2010](#), §2, [Soong et Constantinou, 1994](#), §XV.

## 1.5.2 Capteurs

**Instrumentation de la structure isolée** On cherche à savoir comment instrumenter une structure sismiquement isolée au niveau de la base, en vue de la mise en œuvre d'un système de contrôle par retour d'état. Une solution judicieuse consiste à faire une distinction entre la base et les étages supérieurs de la structure isolée, et à les distribuer comme suit :

- au niveau de la base de la structure isolée : un large choix de capteurs est possible grâce à la facilité de positionnement au gré de l'utilisateur. Il est possible d'utiliser des capteurs de mesure du déplacement relatif et absolu, [Asch G. et coll., 2010](#), §11.1.3, vitesse relative ou absolue par les vélocimètres, [Asch G. et coll., 2010](#), §11.1.3, accélération absolue. Pour la mesure des accélérations absolues, les accéléromètres sont habituellement utilisés. De nombreux types et technologies de fabrication existent, [Asch G. et coll., 2010](#), §11. Des schémas qui décrivent leur fonctionnement sont aussi présentés dans [Inman, 2001](#), pp. 126. Le déplacement relatif peut être mesuré par des capteurs optiques de type laser, de précision nanométrique, [Leitmann et Reithmeier, 1995](#). Des systèmes plus modernes utilisent des caméras rapides : voir le système de mesure en stéréovision, [Montgabure et al., 2012](#), §5, utilisé dans le cadre des essais Bandit au laboratoire EMSI. En ce qui concerne la transmission des données, les réseaux sans fil (*wireless*) sont actuellement étudiés, [Wang et al., 2012](#).
- aux niveaux supérieurs : le choix des capteurs devient très limité. Si dans le cas précédent on avait la possibilité de faire des mesures relatives en accrochant les capteurs entre la fondation et la base de la structure, dans le cas présent on perd cette flexibilité. Aux niveaux supérieurs on ne peut pas accrocher des capteurs entre chaque nœud et un repère physique extérieur à la structure. Vu les capteurs qui existent actuellement sur le marché, il est difficile d'imaginer un système de mesure autre que par les accéléromètres qui peuvent facilement être positionnés au niveau de chaque étage de la structure isolée et ainsi fournir des enregistrements de qualité.

**Instrumentation en vue de la protection du site en temps-réel** Afin de pouvoir déclencher des alertes sismiques et ainsi protéger les sites et leurs installations, on retrouve dans la littérature du domaine de la sismologie la solution de mise en œuvre de réseaux de stations sismiques, soit : (i) autour du site, sur un rayon de quelques dizaines de kilomètres (par exemple, c'est le cas de la centrale nucléaire Ignalia en Lituanie, [Occhiuzzi et al., 2006](#)), sinon (ii) autour de l'épicentre de séismes passés (voir par exemple, le réseau Irpinia au sud de l'Italie, [Zollo et al., 2009](#), [Satriano et al., 2011](#) ; au Taiwan, [Wu et Tend, 2002](#)). Rappelons que l'épicentre représente la projection de l'hypocentre sur la couche terrestre, et que l'hypocentre (*i.e.* foyer) représente le point de départ de la rupture sismique sur la faille géologique (voir la [figure 1.7](#)).



**Figure 1.7** – Excitation sismique des structures, [Gibert, 1988](#), Fig. 20.7

Pour plus de détails, voir [Lay et Wallace, 1995](#). Intégrées dans des Systèmes d'alerte



avancée (ou précoce)<sup>2</sup>, ces stations dotées d'accéléromètres, vélocimètres, etc., transmettent l'information à une station centrale capable d'effectuer des calculs et prédictions en temps-réel de certaines grandeurs relevant du domaine de la sismologie, à partir de lois empiriques ou semi-empiriques pré-établies et souvent ayant qu'une applicabilité géographique locale ; souvent elles sont établies par régression linéaire, [Satriano et al., 2008](#), [Satriano et al., 2007](#). Ces prédictions portent sur :

- (i) période prédominante, [Allen et Kanamori, 2003](#), [Lancieri et Zollo, 2008](#),
- (ii) la magnitude, par des lois déterministes [Grasso et al., 2005](#), Sec. 2, [Gasparini et al., 2007](#), pp. 24–25, [Allen, 2003](#), [Allen et Kanamori, 2003](#), ou bayésiennes [Lancieri et Zollo, 2008](#), [Zollo et al., 2009](#), [Satriano et al., 2011](#), Sec. 2.6,
- (iii) l'énergie, [Clough et Penzien, 2003](#), pp. 571,
- (iv) l'intensité macrosismique, [Grünthal, 1998](#), [Gibert, 1988](#), §20.2.4,
- (v) les position de l'épicentre, de l'hypocentre, [Kamigaichi, 2004](#), [Odaka et al., 2003](#), [Satriano et al., 2007](#), [Satriano et al., 2008](#), [Zollo et al., 2009](#), et la distance du foyer au site (*i.e.* distance focale),
- (vi) vitesses des ondes P et S, [Occhiuzzi et al., 2004](#), Fig. 1,
- (vii) l'accélération du sol maximale<sup>3</sup>  $\ddot{x}_g^{\max}$ , [Clough et Penzien, 2003](#), pp. 587–588, [Allen, 2003](#),
- (viii) spectre de sol en déplacement et pseudo-accélération (PSA), [Occhiuzzi et al., 2004](#), [Clough et Penzien, 2003](#), pp. 590–594.

Les deux dernières estimations sont intéressantes du point de vue de l'approche de contrôle proposée dans cette thèse et peuvent être utilisées pour choisir les paramètres des lois de commande (voir les détails dans le [chapitre 3](#)). À partir de ces estimations, des décisions peuvent être prises, dans le créneau de temps avant l'arrivée de l'onde sismique au niveau du site (cette durée peut varier de quelques secondes jusqu'à des dizaines, [Occhiuzzi et al., 2004](#)). Des exemples de décisions incluent : la chute des barres de contrôle qui dure 2 secondes dans le cas du réacteur de Ignalia, [Occhiuzzi et al., 2006](#), ajustement des paramètres des dispositifs semi-actifs qui dure 1 seconde, [Occhiuzzi et al., 2004](#), etc.

Le principe qui est à la base des Systèmes d'alerte avancée est que la propagation des ondes sismiques se fait à une vitesse très inférieure à celle de l'onde électromagnétique : le message d'alerte peut ainsi être transmis rapidement à distance via le téléphone, la radio, etc. En théorie, cette information peut être utilisée par exemple pour la mise en œuvre de lois de commande par anticipation (feedforward), thématique intéressante vu le sujet de cette thèse, c'est pourquoi nous allons détailler un point précis par la suite.

**Identification (détection) d'hypocentres** Revenons sur l'idée mentionnée dans le paragraphe antérieur, à savoir que la communauté scientifique du contrôle de structures a été sensibilisée aux résultats des sismologues portant sur l'estimation en temps-réel de certaines caractéristiques du séisme via les systèmes d'alerte avancée. Avant d'arriver à la synthèse de lois de commande, il est nécessaire de pouvoir appliquer les lois empiriques et semi-empiriques proposées par les chercheurs

2. en anglais : Early Warning Systems (EWS)

3. en anglais : Peak Ground Acceleration (PGA)



du domaine de la sismologie. Nous avons vu que elles-ci dépendent d'un certain nombre de variables dont la distance entre le site à protéger et l'hypocentre.

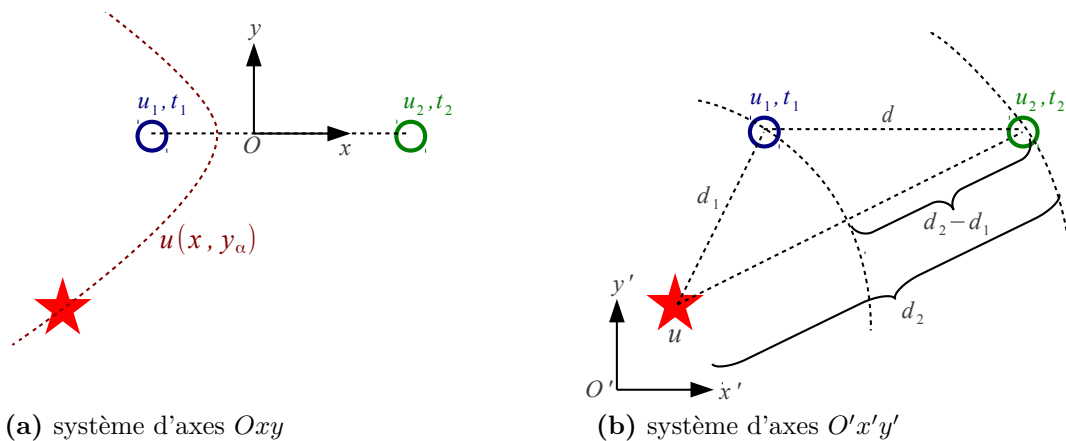
Afin de pouvoir se familiariser avec les outils habituels de travail des sismologues, présentons une méthode d'identification des hypocentres.

**Méthode des hyperboles : une approche géométrique** Souvent mentionnée dans la littérature, la méthode des hyperboles, [Pujol et Smalley, 1990](#), [Pujol, 2004](#), est utilisée pour identifier les hypocentres, supposés être ponctuels. En d'autres termes, cette méthode ne couvre pas la situation où la source sismique est une faille. N'ayant pas trouvé les formules explicites de calcul, nous avons décidé d'effectuer le travail ci-après.

On suppose que l'espace est constitué par un milieu homogène et isotrope. Sur une carte bi-dimensionnelle, une onde sismique se déclenche au niveau d'un foyer et se propage à vitesse constante, pour arriver à différents instants de temps au niveau de plusieurs stations sismiques. Voir les notations dans le [tableau 1.1](#) et le schéma de la [figure 1.8](#).

Notation	Signification
$Oxy, O'x'y'$	systèmes de coordonnées cartésiennes, dont le premier est relatifs et le second est absolu
$u(x, y)$	vecteur des coordonnées spatiales ( <i>i.e.</i> géométriques) de l'épicentre, dans le plan $Oxy$
$n$	nombre de stations
$u_i(x_i, y_i)$ , où $i = 1, \dots, n$	vecteur des coordonnées spatiales ( <i>i.e.</i> géométriques) de $n$ stations sismiques
$t_i$ , où $i = 1, \dots, n$	durée de temps que le front d'onde sismique met du moment où l'événement sismique a lieu au niveau de l'épicentre, pour arriver à la station $i$
$\tau$	durée de temps que le front d'onde sismique met du moment où l'événement sismique a lieu au niveau de l'épicentre, pour arriver à la première station ( <i>i.e.</i> celle situé le plus près de l'épicentre)
$\Delta t_i$ , où $i = 2, \dots, n$	durée de temps que le front d'onde sismique met pour passer de la 1ère station sismique à celle identifiée par l'indice $i$ ; $\Delta t_1 = 0$
$d_i$ , où $i = 1, \dots, n$	distance, en ligne droite, entre l'épicentre et la station sismique $i$
$d_{i \leftrightarrow j}$ , où $i < j$ , $i = 1, \dots, n-1$ , et $j = 2, \dots, n$	distance, en ligne droite, entre chaque 2 stations identifiés par les indices $i$ et $j$
$c$	célérité, <i>i.e.</i> , vitesse de déplacement du front d'onde sismique

**Tableau 1.1** – Notations dans l'espace  $\mathbb{R}^2$  : coordonnées géométriques, distances, temps d'arrivée.



**Figure 1.8** – Schéma avec les positions d'un hypocentre et de deux stations sismiques, sur une carte en  $\mathbb{R}^2$  et leurs systèmes de coordonnées cartésiennes

### Problème 1.1 (*dans l'espace* $\mathbb{R}^2$ )

On suppose connues les positions de deux stations  $u_i(x_i, y_i)$ , où  $i = 1, 2$ . On suppose connues  $\Delta t_2$  et  $c$ .  $\tau$  n'est pas connu. Par hypothèse de travail,  $c$  est supposée constante. Trouver  $u(x, y)$ , à savoir l'ensemble de points qui définissent les positions possibles (i.e., admissibles) de l'épicentre.  $d > 0$  est la distance en ligne droite entre les deux stations (voir la [figure 1.8a](#)).

Calculs faits, on trouve les solutions  $u(x, y_\alpha)$ , où la relation entre les deux coordonnées est constituée par une hyperbole à une seule branche (la seconde branche, symétrique par rapport à la première, n'a pas de signification physique et donc a été enlevée) :

$$y_\alpha(x) = \begin{cases} \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) x^2 - \frac{d^2}{4}(1 - \alpha^2)} & \text{pour } x \geq \frac{d\alpha}{2} & \text{si } \alpha \in (0, 1) \\ \text{ligne médiatrice qui passe par l'origine des axes} & & \text{si } \alpha = 0 \\ \pm \sqrt{\left(\frac{1}{\alpha^2} - 1\right) x^2 - \frac{d^2}{4}(1 - \alpha^2)} & \text{pour } x \leq \frac{d\alpha}{2} & \text{si } \alpha \in (-1, 0) \end{cases}$$

où le paramètre adimensionnel  $\alpha = \frac{c}{d}(t_1 - t_2) \in (-1, 1)$ .

Si on veut passer dans un repère absolu  $O'x'y'$ , une solution consiste à utiliser des rotations dans le plan  $\mathbb{R}^2$  :

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{O',O} \\ y_{O',O} \end{pmatrix}$$

où  $\theta$  représente l'angle entre les axes  $Ox$  et  $O'x'$ .

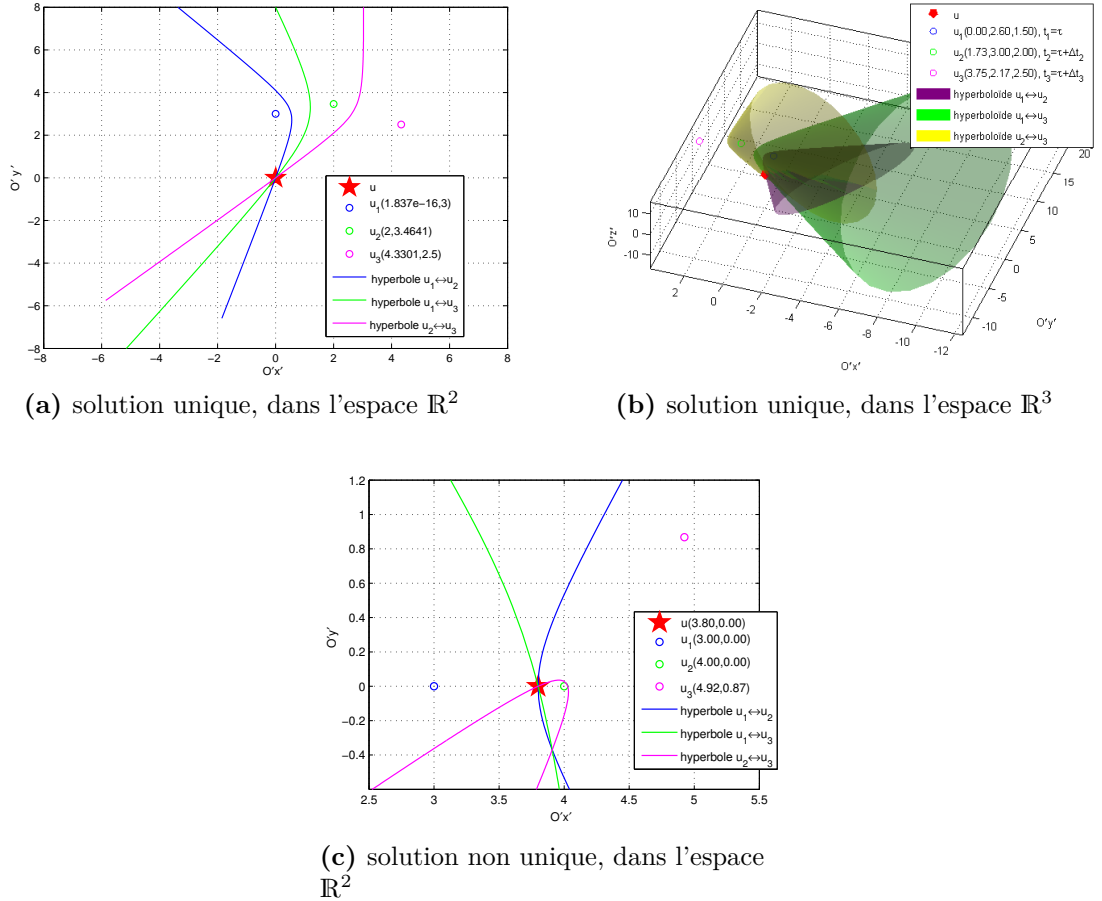
### Problème 1.2 (*dans l'espace* $\mathbb{R}^2$ )

On suppose connues les positions cartésiennes de  $n = 3$  stations  $u_i(x'_i, y'_i)$ , où  $i = 1, \dots, n$ , dans un repère absolu  $O'x'y'$ . On suppose connues  $\Delta t_2, \Delta t_3$  (ou de façon équivalente, on connaît  $t_1, t_2$  et  $t_3$ ) et  $c$ .  $\tau$  n'est pas connu. Par hypothèse de travail,  $c$  est supposée constante. Trouver  $u(x', y')$ , à savoir l'ensemble de

points qui définissent les positions possibles (i.e., admissibles) de l'épicentre entre chaque 2 stations.

Pour les calculs, nous avons utilisé la relation  $t_i = t_j + \alpha \frac{d_{i \leftrightarrow j}}{c}$  où  $\alpha \in (-1, 1)$ ,  $i < j$ ,  $i = 1, \dots, n-1$  et  $j = 2, \dots, n$ . Dans la figure 1.9a, l'hypocentre a été identifié de façon univoque par l'intersection des hyperboles, à partir des informations enregistrées par les 3 stations sismiques. En reprenant cette étude pour le cas de l'espace  $\mathbb{R}^3$ , on trouvera, par exemple, le résultat de la figure 1.9b. Il est à signaler qu'il existe des situations, dépendant de la géométrie des positions des stations par rapport à l'épicentre, où cette méthode n'aboutit pas à une solution unique : voir la figure 1.9c. Cette observation conduit à suggérer une étude en préalable, nécessaire pour décider comment placer les stations de façon « optimale » vis-à-vis de l'épicentre.

La réalité physique associée aux vrais séismes est beaucoup plus complexe. D'autres méthodes plus réalistes utilisées dans la littérature en sismologie repose sur les cellules de Voronoï [Satriano et al., 2008](#), [Satriano et al., 2007](#), [Zollo et al., 2009](#).



**Figure 1.9** – Identification des coordonnées d'un hypocentre  $u$ , par la méthode des hyperboles. Les solutions sont situées à l'intersection des hyperboles en  $\mathbb{R}^2$ , et hyperboloides en  $\mathbb{R}^3$ , respectivement

### 1.5.3 Modèles de structures à plusieurs degrés de liberté

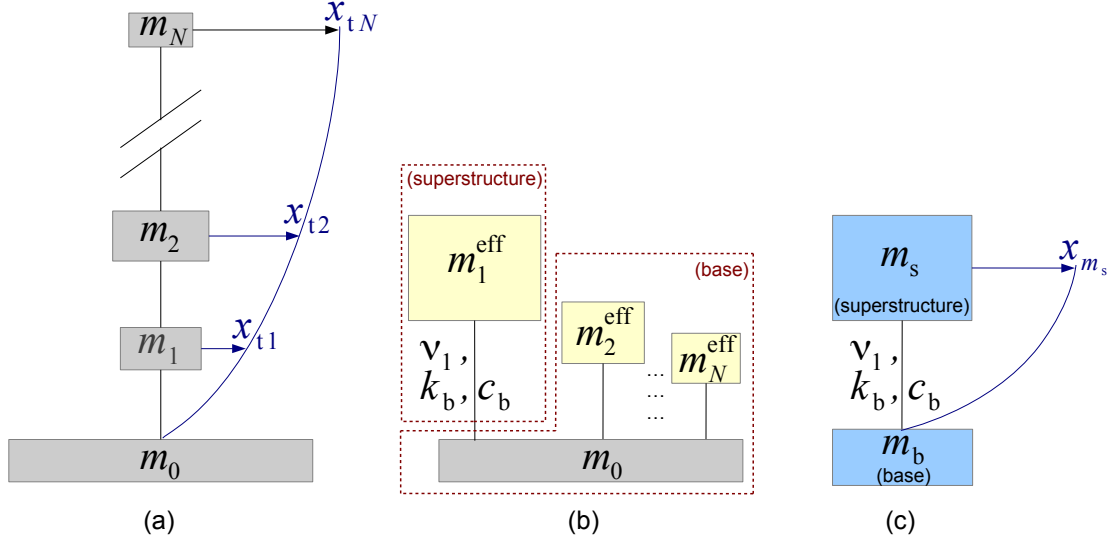
En général, on utilise des modèles discrétisés de structures de type masse-amortissement-raideur, ou  $M-C-K$ , [Clough et Penzien, 2003](#), [Chopra, 2007](#), qui constituent ha-

bituellement une première approximation du comportement de la majorité des structures. Ces modèles peuvent être classés par rapport aux propriétés de ces matrices : le cas le plus simple consiste à créer des modèles où toutes ces matrices sont symétriques. En revanche, d'autres systèmes physiques nécessitent des hypothèses moins restrictives, notamment sur les matrices  $C$  et  $K$ . De plus, un très grand nombre de phénomènes non linéaires peuvent être introduits lors d'une modélisation fine. En associant un certain maillage spatial à la structure et multiples DDL à chaque nœud sur le maillage, on peut rapidement obtenir des modèles assez complexes. En revanche, pour l'automatique, il est nécessaire de partir de modèles simples et représentatifs, d'où la problématique de réduction de modèle.

**Techniques de réduction de modèle en vue de la synthèse de lois de commande** En réalité, les structures sismiquement isolées sont des systèmes qui ont un grand nombre de degrés de liberté. Afin d'effectuer la synthèse de lois de commande – l'objectif de cette thèse –, il est nécessaire de partir de modèles suffisamment simples et représentatifs. Plusieurs raisons sont à mentionner pour justifier le besoin de passer par une étape intermédiaire, qui consiste à calculer des modèles réduites : (i) les lois de commande synthétisées doivent avoir un niveau raisonnable de complexité pour ainsi faciliter leur mise en œuvre future ; (ii) le calcul par un contrôleur (ou micro-ordinateur) des caractéristiques des dispositifs semi-actifs devrait se faire en temps-réel. Parmi les techniques de réduction de modèle connues dans la littérature, détaillons :

- (i) la technique présentée dans [Glad et Ljung, 2000](#), §3.6, consiste à construire un modèle réduit de l'original, et représentatif en termes de la relation entrées-sorties de ce système linéaire. Deux étapes lui sont associées : (a) effectuer une transformation vers un espace d'état modal appelé *balanced state space*, et (b) dans ce nouveau espace, éliminer les variables d'état modales qui ont une influence jugée négligeable en évaluant les grammiens de contrôlabilité et d'observabilité du système original.
- (ii) réduction modale dans l'espace des variables d'état en utilisant la propriété de diagonalisation sous forme Jordan de la matrice  $A$ , [Inman, 2006](#), §7.7-7.8.
- (iii) la technique présentée dans [Politopoulos, 2012](#), passe par une première étape de décomposition modale de la dynamique de la structure, ensuite ne garder que les premiers modes de vibration, écrire les équations dynamiques de Lagrange en terme d'énergie modale et en déduire le modèle réduit. Une particularité de cette méthode est que, à la fin, la matrice  $M$  sera pleine.
- (iv) effectuer une analyse modale du système de départ ; utiliser les vecteurs propres complexes pour en déduire une transformation entre coordonnées physiques et modales. Dans l'espace des coordonnées modales complexes, ne garder que la dynamique des  $n$  premières coordonnées modales pour ainsi définir un modèle réduit. Celles-ci seront appelées *contrôlées*, parce qu'elles seront utilisées pour construire un modèle réduit en vue de la synthèse d'une loi de commande, tandis que les autres seront négligées, [Adhikari et al., 1998](#), [Meirovitch, 1990](#), [Preumont, 2002](#), 10.4, [Politopoulos et Pham, 2011](#). Les erreurs de troncature peuvent être quantifiées et sont étudiées, par exemple dans [Soong, 1990](#), §4.1.
- (v) les techniques de décomposition en valeurs singulières de Hankel, [Balas et al., 2012](#).

À titre d'exemple, détaillons une des techniques de réduction. Celle-ci a été utilisée pour construire des modèles réduits à 2 DDL dans la thèse de [Pham, 2010](#), qui seront d'ailleurs repris dans nos travaux de recherche, plus loin dans les [sections 2.1.2](#) et [2.1.3](#). On les utilisera pour construire nos schémas de contrôle.



**Figure 1.10** – Schémas de réduction de modèle : (a) modèle initial à  $N$  DDL ; (b)  $N$  oscillateurs mis en parallèle ; (c) modèle réduit à 1 DDL

Un modèle initial de type brochette à  $N$  DDL est illustré dans la [figure 1.10\(a\)](#). Les masses concentrées à chaque niveau  $i = 1, \dots, N$ , sont notées par  $m_i$  et sont utilisées pour construire la matrice de masse  $M_t$ . On suppose qu'il s'agit d'un système linéaire de type masse-amortissement modal-ressort : sa dynamique est régie par un système linéaire d'EDO à coefficients constants. Notons par  $x_t(t)$  le vecteur des déplacements relatifs de chaque nœud, par rapport à une masse supplémentaire  $m_0$  située au niveau zero, qui représente la *vraie* base de la structure à  $N$  DDL. Une déformée modale hypothétique est illustrée par la courbe bleue. Pour effectuer le passage vers un modèle réduit à 1 DDL de masse  $m_s$  appelée superstructure par la suite, plus une masse  $m_b$  appelée base par la suite, les deux illustrées dans la [figure 1.10\(c\)](#), nous allons utiliser la technique présentée dans [Pham, 2010](#), §3.1 et §5.3.2. Dans un premier temps, elle consiste à poser et fixer  $N$  oscillateurs simples sur  $m_0$  et associer à chaque oscillateur une paire masse-fréquence propre de vibration, les valeurs  $(m_i^{\text{eff}}, \nu_i)$ , sachant que  $\nu_i, \omega_i = 2\pi\nu_i, \varphi_i, \xi_i$  et  $m_i^{\text{eff}}$  sont la fréquence, la pulsation, la déformée modale, l'amortissement et la *masse effective modale*, [Pecker, 2010b](#), §7.7, correspondant au mode  $i$  de la structure initiale à  $N$  DDL, respectivement. En particulier,

$$m_1^{\text{eff}} = \frac{(\varphi_{t1}' M_t 1_{n \times 1})^2}{\varphi_{t1}' M_t \varphi_{t1}},$$

où  $\varphi_{t1}$  est la première déformée modale de la structure initiale. En introduisant trois nouvelles notations :  $\omega_s = \omega_1$ ,  $\xi_s = \xi_1$  et  $m_s = m_1^{\text{eff}}$ , les caractéristiques raideur-amortissement du premier oscillateur de masse  $m_s$  sont calculées par :

$$k_s = \omega_s^2 m_s, \quad c_s = 2\xi_s \omega_s m_s.$$

Du même on aurait pu calculer les caractéristiques des autres modes non isolés et des oscillateurs associés, mais en ce moment on fait l'hypothèse que le mouvement

du premier oscillateur seul est suffisamment représentatif de la dynamique globale du système initial et pour les autres oscillateurs on considère un mouvement de corps rigide. En d'autres termes, ils sont solidaires à la masse  $m_0$ . Cette hypothèse est d'autant plus réaliste que (i) l'essentiel de l'énergie spectrale du signal sismique se trouve à gauche par rapport à chaque  $\omega_j$ , où  $j = 2, \dots, N$ ; en d'autres termes, le signal d'excitation  $\ddot{x}_g(t)$  qui est à basse fréquence, amplifie principalement le premier mode et non les modes supérieurs, et (ii)  $m_1^{\text{eff}}$  est proche de la valeur de la somme totale  $\sum_{i=1}^N m_i$ . C'est pourquoi, dans la [figure 1.10\(c\)](#), la masse  $m_s$  est prise égale à la masse effective du premier mode  $m_1^{\text{eff}}$ , tandis que  $m_b$  est la somme de  $m_0$  plus les masses effectives des modes non isolés  $m_j^{\text{eff}}$ , où  $j = 2, \dots, N$ . Vu les notations de la [figure 1.10](#) si on fait le bilan des masses, on retrouve que leur somme donne la masse totale physique, [Pecker, 2010b](#), §7.7, eq. (7.30), [Preumont, 1990](#), §6, eq. (6.39) :

$$\sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N m_i^{\text{eff}} = m_b + m_s,$$

et les efforts totaux au niveau  $m_0$  dans les deux schémas représentés dans les [figure 1.10\(a\)–\(b\)](#) sont les mêmes. Le passage entre la coordonnée généralisée relative  $q_{r1}(t)$  du premier mode de vibration de la structure initiale et le déplacement scalaire  $x_{m_s}$  de la masse  $m_s$  par rapport à la base  $m_b$ , du modèle réduit, sont données par :

$$x_{m_s}(t) = \frac{\varphi_{t1}' M_t \varphi_{t1}}{\varphi_{t1}' M_t 1_{n \times 1}} q_{r1}(t).$$

En anticipant un peu l'évolution de cette thèse, précisons que s'il se trouve que les schémas de contrôle étudiés dans le [chapitre 3](#) où les lois de commande sont synthétisées à partir de modèles réduites ne donnent pas des résultats satisfaisants, il faudra peut-être essayer dans un premier temps de revenir sur l'hypothèse de ne garder que le mouvement du premier oscillateur et de fixer (*i.e.* bloquer) les autres sur  $m_0$  dans la construction du modèle réduit, par le passage intermédiaire illustré dans la [figure 1.10\(b\)](#). En d'autres termes, il est possible que par rapport aux caractéristiques du signal sismique, cette hypothèse ne soit pas suffisamment réaliste, donc il faudra essayer de débloquent successivement les autres oscillateurs de masse  $m_j^{\text{eff}}$ , où  $j = 2, \dots, N$ , et en reconstruire un modèle réduit à plusieurs DDL.

Les deux masses  $m_b$  et  $m_s$  sont ainsi choisies par rapport à la physique du processus. Pour définir la relation entre les deux, on peut utiliser le rapport des masses  $\tilde{\gamma} = m_s/(m_b + m_s)$ .

Après avoir posé le modèle réduit de la [figure 1.10\(c\)](#) sur des appuis parasismiques entre la base et le sol, on obtient enfin un modèle réduit à 2 DDL. Pour fixer les valeurs de la raideur  $k_b$  et de l'amortissement fixe  $c_b$  des appuis parasismiques, une fois de plus on peut faire appel à une nouvelle approximation : la dynamique de ce modèle réduit est approximée par un oscillateur simple à 1 DDL de masse totale  $m_b + m_s$ . Ensuite, on part de la forme canonique de l'équation de cet oscillateur et on choisit les valeurs de la fréquence d'oscillation  $\nu_b$  (typiquement de l'ordre de 0.5 Hz, valeur représentative pour les structures isolées) et un taux d'amortissement  $\xi_b$ . D'où les relations de calcul :

$$k_b = \omega_b^2(m_b + m_s), \quad c_b = 2\xi_b\omega_b(m_b + m_s)$$

où la pulsation  $\omega_b = 2\pi\nu_b$ . Pour plus de détails sur cette technique, voir [Pham, 2010](#), §3.1.

**Représentation du système contrôlé** Deux types de représentations de ces systèmes contrôlés<sup>4</sup> sont courants dans la littérature : (i) par EDO de 2<sup>e</sup> ordre, situation où on parle de système masse-amortissement-ressort (ou  $M$ - $C$ - $K$ ), et (ii) par EDO du 1<sup>er</sup> ordre, situation désignée généralement par représentation dans l'espace des variables d'état, [Inman, 2006](#), §7. Dans le dernier cas, le vecteur d'état est construit à partir des vecteurs en déplacement et vitesse, c'est pourquoi sa dimension est toujours un nombre pair.

De plus, la dynamique de chacune de ces représentations peut être définie en termes de : (i) coordonnées physiques ou coordonnées généralisées ; (ii) coordonnées relatives ou absolues. Au total on retrouve 6 représentations, pas toutes utilisées dans la littérature pour résoudre des problèmes de contrôle. En anticipant un peu l'évolution de cet état de l'art, les [tableaux 1.3](#) et [1.4](#) ont une rubrique intitulée « variables d'état » qui illustrent le choix habituel et les références bibliographiques associées. La représentation en coordonnées généralisée présente un intérêt certain, vu le problème défini dans la [section 1.3.2](#), c'est pourquoi elles seront traitées dans la [section 2.1](#).

#### 1.5.4 Signaux sismiques naturels et artificiels

Vu le contexte plus large de la thèse, à savoir résoudre des problèmes de contrôle en génie parasismique, et l'objectif précis, à savoir la synthèse de lois de commande, afin de pouvoir valider les schémas de contrôle proposés on se pose la question sur le choix des signaux sismiques : est-ce qu'on utilise des signaux réels, historiques ou préfère-t-on générer des signaux artificiels ? Dans le premier cas, il faudra dire un mot sur l'accessibilité aux bases de données (où est-ce qu'on peut les trouver ?), et dans le second cas, il est nécessaire de passer en revue les algorithmes connus de synthèse de signaux.

**Accélérogrammes et bases de données publiques** De nos jours, les réseaux modernes de capteurs sismiques sont de plus en plus nombreux. Plusieurs bases de données publiques avec un accès gratuit et en ligne sont disponibles. À titre d'exemple précisons :

- PEER<sup>5</sup>, qui contient un grand nombre d'enregistrements d'événements historiques à travers le monde, par exemple aux États-Unis, on peut citer l'événement Northridge (daté 1994) ;
- le réseau japonais de stations sismiques KIK-net et K-net<sup>6</sup>, où il est possible de trouver les accélérogrammes de l'événement Kobé (daté 1995) et Tōhoku (du 11 mars 2011) au Japon ;
- le réseau français RAP<sup>7</sup>, où on peut mentionner le tremblement de terre qui a eu lieu le 29/11/2007 en Martinique, de magnitude 7.4.

Un grand nombre de renseignements peuvent y être retrouvés : les coordonnées géographiques de chaque station qui a enregistré le signal, distance par rapport à l'épicentre, spectres de réponse de sol, etc. Précisons aussi les données sismiques

4. en anglais : control systems, [Coron, 2007](#)

5. Pacific Earthquake Engineering Research <http://peer.berkeley.edu/nga>

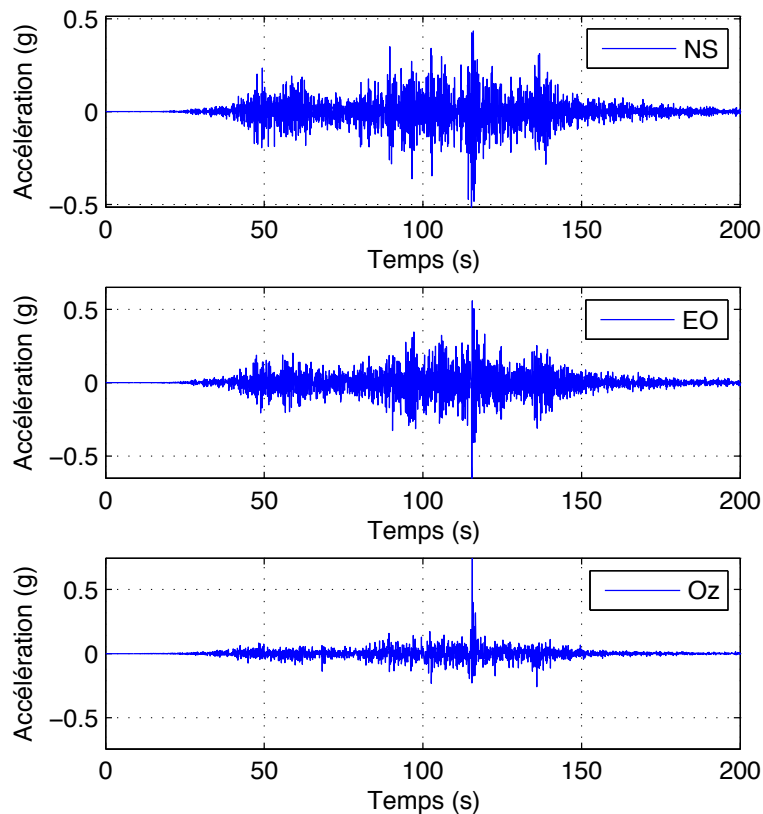
6. Digital Strong-Motion Seismograph Network KIK-net and K-net <http://www.kik.bosai.go.jp>

7. Réseau Accélérométrie Permanent <http://www-rap.obs.ujf-grenoble.fr/>



européennes et américaines formatées, utilisées dans le cadre des Règles Fondamentales de Sûreté (RFS) établies en 1998, applicables aux installations nucléaires françaises. Il s'agit de quelques centaines de signaux mesurés dans le plan horizontal et vertical.

Pour le lecteur qui n'est pas très familiarisé avec la terminologie habituelle associée aux séismes, précisons qu'un accélérogramme est un signal vectoriel à trois composantes, sachant que chaque composante représente physiquement une accélération absolue du sol (par rapport à un point fixe dans l'espace, non solidaire à la Terre) dans une des trois directions de l'espace : Ox, Oy et Oz. Ces axes sont choisis orthogonaux, dont : (i) deux axes horizontaux (parallèles à la couche terrestre et perpendiculaires entre eux : Ox et Oy), et (ii) le troisième vertical (Oz). Les axes Ox et Oy se confondent avec les orientations géographiques nord-sud (NS) et est-ouest (EO), respectivement. À titre d'illustration, voir la [figure 1.11](#) : ce signal sismique impressionne par sa durée et le fort niveau en accélération des pics.



**Figure 1.11** – Signal sismique Tōhoku (Fukushima) enregistré par la station FKSH19, le 2011/03/11 à 14h46m38s

**Représentation de signaux artificiels (*i.e.*, synthétiques)** Souvent les bases de données de signaux sismiques réels associées aux divers sites géographiques à travers le monde contiennent très peu d'enregistrements sismiques, voire pas du tout. Des pays comme le Japon, la Nouvelle-Zélande, la Grèce, l'Italie, les États-Unis (la côte ouest) sont des exceptions. Plusieurs méthodes pour générer des signaux sismiques sont couramment rencontrées en génie parasismique, que nous allons classer en deux groupes : d'un côté les méthodes stochastiques et de l'autre les méthodes déterministes.

1°) Commençons par les méthodes stochastiques :



- filtrer des réalisations de bruit blanc issues d'un processus stochastique par des filtres de Kanai-Tajimi, [Soong, 1990](#). Ce dernier représente un filtre linéaire de second ordre, ayant une entrée et une sortie, de fonction de transfert  $G(s)$  telle que  $|G(j\omega)|^2 = \text{DSP}(\omega)$  où la densité spectrale de puissance  $\text{DSP}(\omega)$  est donnée *a priori*. Afin de pouvoir avoir une meilleure représentation du contenu spectral des signaux, il est préférable d'utiliser des filtres plus sophistiqués, d'ordre supérieur, voir par exemple les travaux de [Narasimhan, 2004](#), [Narasimhan et Nagarajaiah, 2006](#).

Ce procédé est suivi d'une seconde étape qui consiste à multiplier le bruit coloré par une enveloppe temporelle. L'allure de celle-ci est fonction de la proximité de la faille : on distingue les séismes en champ proche<sup>8</sup> (*i.e.* au voisinage immédiat de la faille rompue) de ceux en champ lointain de la faille<sup>9</sup>. Pour plus de détails on guide le lecteur vers [Scruggs et Gavin, 2011](#), §30.2.2.

- générer des signaux aléatoires à partir d'un spectre de sol donné. Cette technique sera détaillée dans la [section 2.3.1](#) et utilisée dans ces travaux de thèse pour calibrer et valider les schémas de contrôle.
- une technique encore plus sophistiquée de type stochastique, capable de prendre en compte les caractéristiques de la faille, l'environnement géophysique des tremblements de terre et les conditions locales du site, est présentée dans [Boore, 2003](#). Voir aussi [Rezaeian et der Kiureghian, 2008](#).
- méthode de Karhunen-Loève qui consiste à enrichir les bases de données de signaux sismiques historiques, [Zentner et Poirion, 2012](#) : par exemple, en partant de quelques dizaines on peut arriver à quelques centaines de milliers.
- les filtres de Kalman sont utilisés dans [Sato et Imabayashi, 1999](#), pour calculer les meilleures estimations des signaux sismiques à certains endroits sur une carte géographique, à condition que la propriété d'observabilité soit satisfaite.

2°) Des méthodes de type déterministe qu'on peut citer :

- construire un signal à l'intersection de plusieurs ondes sismiques. Par exemple, dans [Porubov et al., 2003](#), est présenté un modèle d'onde sismique synthétisée à partir de l'équation différentielle partielle (EDP) de Korteweg-de Vries (KdV). Mais, le plus souvent c'est l'EDP de l'onde qui est utilisée, [Pecker, 2010b](#), §9, [Kausel, 2006](#).
- un modèle déterministe simple de la vitesse absolue du sol est utilisé dans [Agrawal et al., 2006](#),

$$\dot{x}_g(t) = C t^n e^{-at} \sin \omega_g t$$

où  $C$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $\omega_g$  sont des paramètres réels à régler à partir de signaux connus *a priori* (voir par exemple, [Agrawal et al., 2006](#), Fig. 3). Par dérivation on peut en déduire l'accélération absolue du sol  $\ddot{x}_g(t)$  et l'équation différentielle qui relie les dérivées successives. D'où le nom de filtre à pouls.

**Apport des représentations fréquentielles et temps-fréquence. Définitions** Comment peut-on caractériser un signal sismique ? En traitement du signal, on distingue les signaux stationnaires et les signaux non stationnaires. Les outils classiques dont la transformée de Fourier, sont bien adaptés à l'analyse de signaux stationnaires, mais ils ne permettent pas de traiter convenablement les signaux non stationnaires où les composantes transitoires sont importantes.

8. en anglais : near-fault earthquake

9. en anglais : far-field earthquake

En revanche, les outils temps-fréquence sont adaptés à l'analyse des signaux non stationnaires. Dans notre travail, nous allons utiliser la famille des distributions énergétiques (classe de Cohen), [Cohen, 1995](#), et particulièrement la distribution de Wigner-Ville (DWV). Cette distribution a été introduite pour la première fois par Eugene Wigner en 1932 dans le domaine de la physique quantique. Plus tard, en 1948 Jean Ville a introduit la notion de *signal analytique* et a contribué à rendre populaire la DWV.

Contrairement à d'autres outils d'analyse temps-fréquence comme la transformée de Fourier de courte durée (STFT, en anglais) ou la transformée en ondelettes qui sont linéaires par rapport au signal, la DWV est bilinéaire et fournit ainsi une représentation énergétique du signal. La DWV est à comparer au module du carré de la STFT et de la transformée en ondelettes appelées, respectivement, spectrogramme et scalogramme, [Benidir, 2004](#), [Tanguy, 1998](#).

Rappelons les définitions et quelques propriétés intéressantes pour notre étude.

- La définition (duale) de la distribution de Wigner-Ville (DWV), d'un signal (scalaire, à énergie finie)  $x \in L_2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$ . Voir par exemple, [Cohen, 1995](#), pp. 114, [Mari et al., 2004](#), pp. 220, [Swami et al., 2001](#), pp. 1–90, [Hlawatsch et Budreaux-Bartels, 1992](#), pp. 35, [Allen et Mills, 2004](#), pp. 762, [Martin et Doncarli, 2004](#), pp. 108, [Mallat, 2009](#), pp. 136, [Stergiopoulos, 2001](#), § 4.4, [Hlawatsch et Auger, 2008](#), § 5.5.1, [Galleani et Cohen, 2000a](#), [Galleani et Cohen, 2000b](#), [Boashash, 2003](#), [Boudreaux-Bartels, 1983](#), [Hlawatsch, 1988](#), [Auger, 1991](#), [Lemoine, 1995](#), [Benidir, 2004](#), [Loughlin et Cohen, 2003](#), [Budreaux-Bartels et Parks, 1986](#), [Fredon et Bridier, 2003](#), pp. 172 :

$$\begin{aligned} W_x : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (t, \omega) &\mapsto W_x(t, \omega) \triangleq \frac{1}{2\pi} \int x^*(t - \frac{1}{2}\tau) x(t + \frac{1}{2}\tau) e^{-j\tau\omega} d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi} \int X^*(\omega + \frac{1}{2}\theta) X(\omega - \frac{1}{2}\theta) e^{-j\theta t} d\theta \end{aligned} \quad (1.2)$$

où  $X(\omega)$  est la transformée de Fourier du signal  $x$ , donnée par la définition (1.3a).

- La définition de la transformée de Fourier et de son inverse : exprimée en fréquence angulaire (TFa) et de son inverse

$$X(\omega) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int x(t) e^{-j\omega t} dt \quad (1.3a)$$

$$x(t) \triangleq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int X(\omega) e^{j\omega t} d\omega \quad (1.3b)$$

(voir [Cohen, 1995](#), pp. XV, [Polyanin, 2002](#), § 0.5.3, [Kreyszig, 2005](#), pp. 519, [Loughlin et Cohen, 2003](#)). Le lecteur remarquera que cette définition de la TF ne correspond pas à celle habituelle, à cause du facteur  $1/\sqrt{2\pi}$ .

- La définition de la *densité spectrale d'énergie* (ESD en anglais), *i.e.*, *puissance spectrale instantanée* d'un signal à énergie totale finie,  $x_T \in L_2(\mathbb{R}; \mathbb{C})$

$$\begin{aligned} \text{ESD}_{x_T} : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0} \\ \omega &\mapsto \text{ESD}_{x_T}(\omega) = |X_T(\omega)|^2 \end{aligned} \quad (1.4)$$

où  $X_T(\omega)$  est la transformée de Fourier du signal  $x_T(t)$ , par la définition (1.3a). Par exemple, on peut construire  $x_T$  à partir d'un signal à énergie totale non finie  $x$ , pris sur une fenêtre d'observation de largeur  $T \in \mathbb{R}_{>0}$ .

• La définition du signal analytique : un signal complexe, obtenu à partir d'un signal réel  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , en ajoutant une partie imaginaire, donnée par la transformée de Hilbert :

$$\mathcal{A}[x(t)] = x(t) + j H[x(t)] \quad (1.5)$$

où l'opérateur  $\mathcal{A}[x(t)]$  représente le *signal analytique* appliqué à  $x(t)$  ;  $H[x(t)]$  est l'opérateur de la transformée de Hilbert. Voir [Cohen, 1995](#), Ch. 2 ; [de Coulon, 1996](#), Ch. 7 ; [Mari et al., 2001](#), Ch. 7.

• Les propriétés de « marginales » d'une DWV quelconque, [Cohen, 1995](#), [Loughlin et Cohen, 2003](#), [Hlawatsch et Budreaux-Bartels, 1992](#) :

$$x^*(t) x(t) = |x(t)|^2 = \int W_x(t, \omega) d\omega \quad (1.6a)$$

$$X^*(\omega) X(\omega) = |X(\omega)|^2 = \int W_x(t, \omega) dt \quad (1.6b)$$

où  $x(t) \in \mathbb{C}$  est un signal quelconque et  $X(\omega) \in \mathbb{C}$  est sa transformée de Fourier cf. (1.3) ;  $x(t)^*$  est la conjuguée complexe du signal  $x(t)$ .

• La distribution de Wigner-Ville lissée (DWVL) représente le produit de convolution d'une fonction DWV par une gaussienne en  $\mathbb{R}^2$  donne un résultat positif ou null, voir, par exemple, [Cartwright, 1976](#), [Cohen, 1995](#), pp. 132, eq. (8.92) et (8.98, où  $\gamma = 0$ ), [Hlawatsch et Auger, 2008](#), Tab. 5.5, pp. 155, [Janssen, 1988](#), Thm. 3.1, [Gröchenig, 2001](#), § 4.4, [Cohen, 1989](#), pp. 961. Les « artefacts » sont réduits visiblement, ce qu'on verra plus loin dans le chapitre suivant, à la [section 2.2](#). Soit

$$G_{T,\Omega}(t, \omega) \triangleq e^{-\frac{t^2}{T^2} - \frac{\omega^2}{\Omega^2}} \quad (1.7a)$$

d'où la propriété

$$(W_x * G_{T,\Omega})(t, \omega) = \int_{\tau=-\infty}^{\tau=\infty} \int_{v=-\infty}^{\infty} G_{T,\Omega}(t - \tau, \omega - v) W_x(\tau, v) d\tau dv \geq 0, \quad \forall x, t, \omega, \quad \text{sous la condition } T\Omega \geq 1 \quad (1.7b)$$

• la DWV n'est pas causale, d'où les bornes supérieures des intégrales dans (1.7b) en  $\tau = \infty$ , au lieu de  $\tau = t$ , et  $v = \infty$  au lieu de  $v = \omega$ .

### Rappel sur les spectres de réponse de l'oscillateur : spectres de sol et de plancher. Propriétés

La définition du spectre de réponse de l'oscillateur en pseudo-accélération :

$$(\omega, \zeta, v) \longmapsto \text{PSA}(\omega, \zeta, v) = \omega^2 \max_{t \geq t_0} |y(t)| \quad (1.8a)$$

où

$$\ddot{y}(t) + 2\zeta\omega\dot{y}(t) + \omega^2 y(t) = v(t), \quad y(t_0) = 0, \quad \dot{y}(t_0) = 0, \quad (1.8b)$$

sachant que la pulsation propre  $\omega > 0$  et le taux d'amortissement (*i.e.* pourcentage d'amortissement critique, [Pecker, 2010b](#), §2)  $\zeta \in (0, 1)$ . L'équivalent en

mécanique de l'équation (1.8b) est donnée par un système de type masse-ressort-amortissement

$$m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + ky(t) = -mv(t), \quad (1.9)$$

où les relations entre la masse  $m$ , la raideur  $k$  et l'amortissement  $c$  sont les suivantes :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}, \quad \zeta = \frac{c}{2\sqrt{mk}}.$$

La solution explicite de (1.8b) est :

$$y(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_{t_0}^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) v(\tau) d\tau \quad (1.10)$$

où  $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ .

Par rapport à la valeur physique de  $v(t)$ , habituellement dans la littérature on parle de :

- spectre de sol si  $v(t) = \ddot{x}_g(t)$ , à savoir l'accélération absolue du sol. Voir plus de détails dans [Gibert, 1988](#), § 20.3.3, [Gupta et Hall, 1990](#), § 1.2, [Clough et Penzien, 2003](#), §25–1, [Pecker, 2010b](#), §4, [Chopra, 2007](#), §6, pp. 203–210, [Naeim et Kelly, 1999](#), §7.3, [Vanmarcke, 1976](#), [Scruggs et Gavin, 2011](#), §30.2.1. À titre d'exemple, une première approximation de la dynamique de la partie superstructure d'un réacteur nucléaire est donnée par l'oscillateur (1.9).
- spectre de plancher si  $v(t) = \ddot{z}_{ai}(t)$  dans (1.8), où  $\ddot{z}_{ai}(t)$  représente l'accélération absolue à l'étage  $i$ . Voir des détails dans [Gibert, 1988](#), § 20.5.5, [Gupta et Hall, 1990](#), § 6. Par cette définition, on suppose un comportement linéaire élastique des équipements qui sont fixés sur les planchers, assimilable au comportement d'un oscillateur simple à 1 DDL. Physiquement, cet outil renseigne par une simple lecture sur la valeur de la force élastique linéaire maximale  $F_e^{\max}$  que l'équipement de masse concentrée  $m$ , subit lors d'une sollicitation *a priori* connue,

$$F_e^{\max} = k \max_t |y(t)| = m \omega^2 \max_t |y(t)| = m \text{PSA}(\omega, \zeta, \ddot{z}_{ai}).$$

C'est une des raisons pour laquelle travailler avec les spectres de plancher simplifie la tâche liée au dimensionnement des équipements.

Le résultat de (1.8a) s'exprime en mètres par seconde au carré, d'où le nom de pseudo-accélération et la notation PSA.

Ces spectres de réponse sont fréquemment utilisés par les communautés du génie parasismique, de génie civil (dans la dynamique des structures) et de génie civil nucléaire. Entre autres, pour l'automaticien, cet outil est intéressant parce qu'il prend en compte la partie transitoire des signaux analysés.

Précisons plusieurs propriétés importantes des spectres de réponse, [Gibert, 1988](#), §20.3.3 :

- (i) le comportement en haute fréquence : quand le contenu spectral du signal d'excitation  $v$  est très inférieur à la fréquence propre  $\omega$  du filtre (1.8b), la valeur du spectre est très proche de celle de l'asymptote

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \text{PSA}(\omega, \zeta, v) = v^{\max}$$

- (ii) le comportement en basse fréquence : quand le contenu spectral du signal d'excitation  $v$  est très supérieur à la fréquence propre  $\omega$  du filtre (1.8b), sachant que  $v$  est physiquement une accélération absolue, alors dans un voisinage de l'origine, la courbe  $\text{PSA}(\omega, \zeta, v)$  est proche de  $\omega^2$  multiplié par le module de la valeur maximale du déplacement absolu calculé à partir de  $v$
- (iii) amplification : si le signal d'entrée  $v$  est multiplié par une constante  $\alpha \in \mathbb{R}$ , le spectre de réponse qui résulte est l'original multiplié par  $|\alpha|$ , *i.e.*

$$\text{PSA}(\omega, \zeta, \alpha v) = |\alpha| \text{PSA}(\omega, \zeta, v).$$

La propriété suivante a été établie à l'aide des propriétés de « marginales ».

- (iv) le lien formel entre le spectre de plancher en pseudo-accélération et la DWV : Pour un signal scalaire complexe  $y(t)$ ,

$$\text{PSA}_\zeta(\omega_n) = \max_t \left( \int W_y(t, \omega) d\omega \right)^{1/2} \quad \text{où} \quad \begin{cases} \ddot{x} + 2\zeta\omega_n\dot{x} + \omega_n^2 x = -\ddot{x}_g \\ y = \omega_n^2 x \end{cases}$$

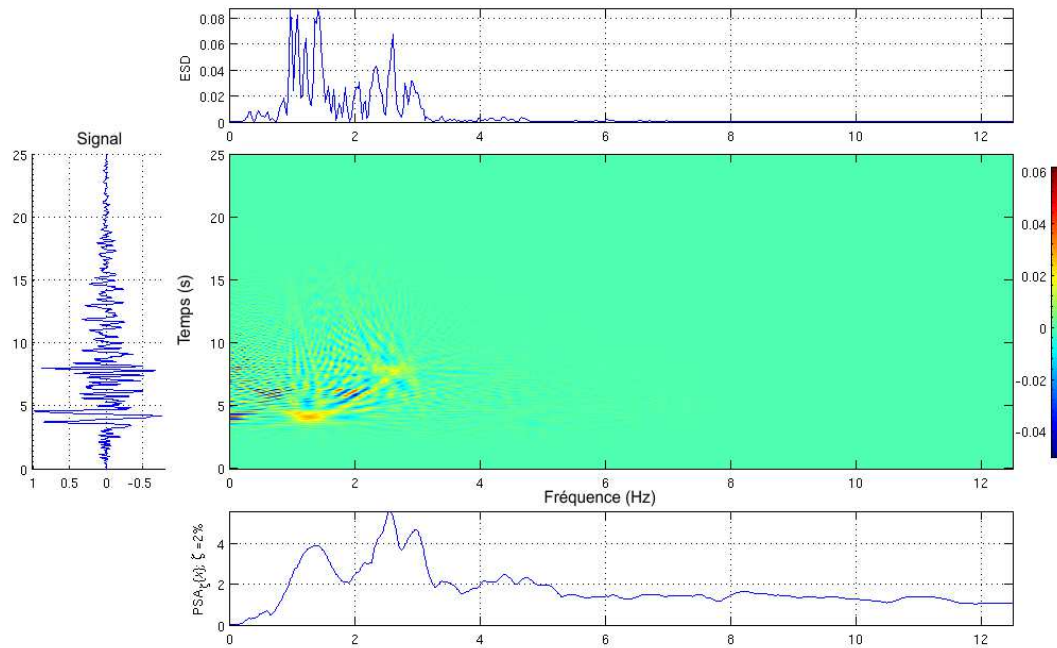
Cette relation montre la potentialité des DWV dans le cadre de l'analyse sismique.

En particulier, pour le cas du spectre de plancher calculé sur une structure isolée, les deux premières propriétés sont illustrées sur la [figure 1.3](#).

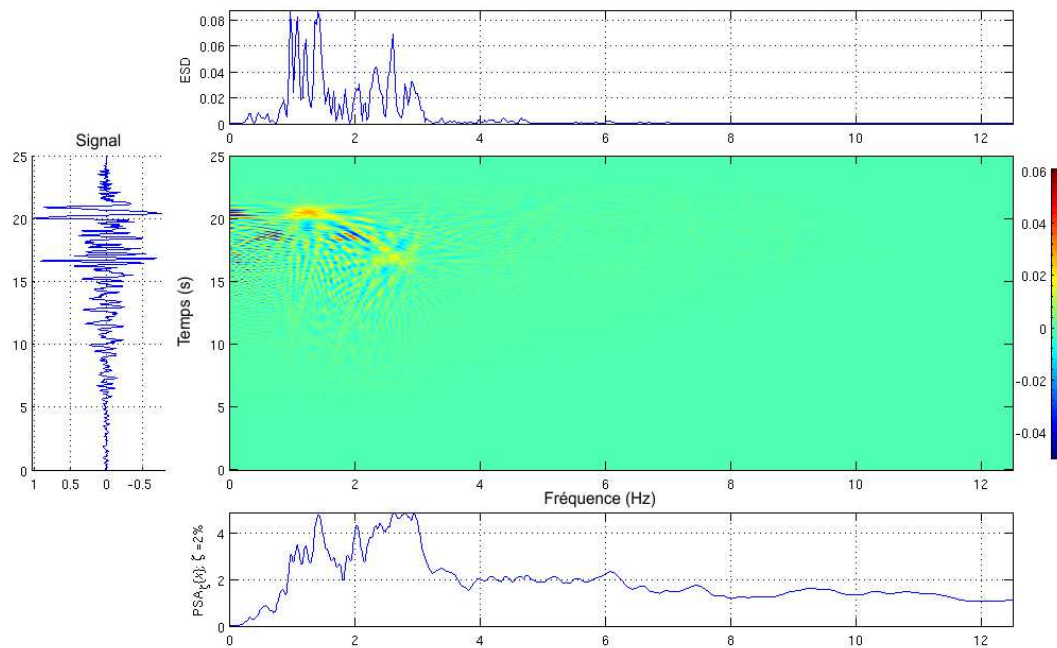
Par la suite de cet exposé, quand le signal  $v(t)$  ressort de façon claire à partir du contexte, la notation  $\text{PSA}_\zeta(\omega)$  sera utilisée.

**Outils temps-fréquence en génie parasismique** En général, les outils temps-fréquence sont très peu utilisés en génie parasismique. De plus, quand ils sont utilisés, leur application est standard et limitée au cadre de l'analyse des signaux. On peut mentionner les travaux sur la famille des outils à base de DWV de [Yandong et Xiaodong, 2007](#). À part la DWV, des propositions sur l'utilisation de la classe des ondelettes pour l'analyse en temps-réel des caractéristiques des signaux sismiques enregistrées sont faites dans [Pnevmatikos et Gantes, 2010](#), [Adhikari et al., 1998](#), [Basu et Nagarajaiah, 2008](#). Ces informations sont utilisées pour ajuster *on-line* les paramètres des lois de commande.

Pour motiver et nuancer l'intérêt d'utiliser les outils temps-fréquence en général et de la DWV en particulier, et ainsi faciliter au lecteur non familiarisé l'accès à un premier niveau de compréhension par l'intuition et l'image, nous avons introduit les Figures [figure 1.12a–figure 1.12b](#). Les figures sont organisées de la même façon que celles de la [section 1.3.3](#), avec la seule différence que l'image centrale est constituée par la DWV standard. Rappelons que la lecture se fait en regardant des bandes horizontales et verticales et en effectuant une comparaison entre les contenus indiqués par chaque sous-figure. Le signal sismique Kobé a été normalisé et analysé dans la [figure 1.12a](#). Il est ensuite inversé dans la [figure 1.12b](#). On remarque que les sous-figures situées en haut, à savoir les densités spectrales d'énergie (ESD en anglais) ne changent pas d'une figure à l'autre, ce qui veut dire que cet outil d'analyse dite classique n'est pas sensible à ce type de transformation ; il ne sent pas le changement transitoire du signal malgré le fait que la partie forte, on le voit bien, s'est déplacée. En revanche, sur les mêmes figures on voit clairement que la DWV, aussi bien que le spectre de plancher, changent : ils sont donc plus



(a) normalisé. Au centre : la DWV



(b) normalisé et tourné. Au centre : la DWV

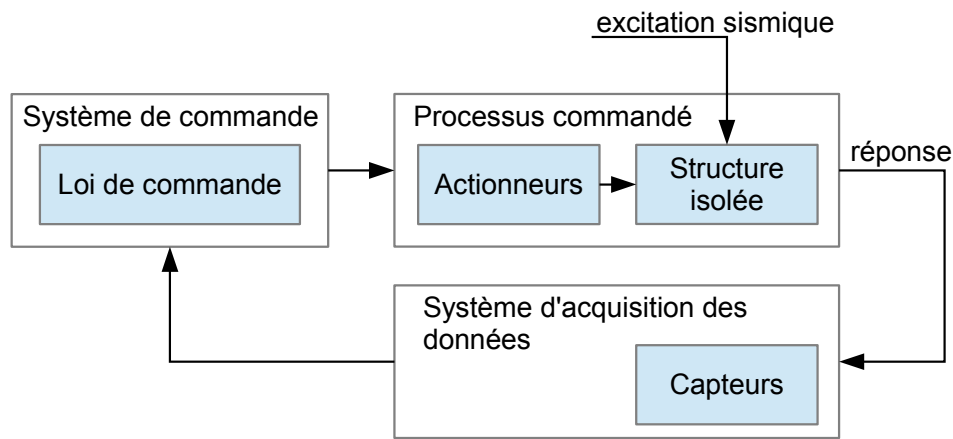
**Figure 1.12** – Analyse du signal sismique Kobé



sensibles et intègrent le changement dû aux composantes transitoires des signaux. Ces outils ont leurs propres limites : par exemple, si on prend l'opposé du signal analysé dans la [figure 1.12a](#), ces outils d'analyse en fréquence et temps-fréquence donnent les mêmes résultats que ceux illustrés par la [figure 1.12a](#). On peut traduire cette observation en disant qu'ils ne sont pas sensibles à tout type de changement transitoire.

### 1.5.5 Schémas de contrôle

**Terminologie et classification** Nous allons reprendre le concept de schéma de contrôle, [Nishitani, 1998](#), [Sueur et al., 1997](#), §1, [Gille et al., 1991](#), §1, illustré par la [figure 1.13](#).



**Figure 1.13** – Schéma de contrôle d'un système asservi

Celle-ci est constituée de 3 blocs dont le système de commande (à l'intérieur duquel on retrouve la loi de commande), le processus commandé et le système d'acquisition des données. Si, dans les paragraphes antérieurs, nous avons déjà présenté les deux derniers blocs, il ne reste que le premier à traiter par la suite.

L'historique des avancements au sujet du contrôle de structures, pendant les dernières décennies, est rappelé dans [Meirovitch, 1990](#), §9, [Nishitani, 1998](#).

Nous allons reprendre la classification de la [section 1.1](#) et discuter par la suite de solutions de contrôle : passif (CP), actif (CA) et semi-actif (CSA). Le CP consiste à fixer une bonne fois pour toutes les paramètres du système via diverses méthodes d'analyse de la réponse de la structure. Sachant que son fonctionnement ne demande pas l'accès aux mesures ou estimations en temps-réel, on peut le classer dans la famille de solutions de contrôle en *boucle ouverte*. Son intérêt est très limité dans le cadre de cette thèse, pour plus d'informations sur ce sujet on propose au lecteur de se référer à [Inman, 2001](#), [Chopra, 2007](#). Le passage depuis les solutions CP vers CA et CSA est souvent motivé dans la littérature par le souhait de pouvoir améliorer certaines limites en performance des solutions de type CP. Les techniques de contrôle plus sophistiquées de type CA et CSA sont au cœur de la discussion qui suivra.

Même si cette thèse porte sur des systèmes d'isolation sismique au niveau de la base, on aimerait sensibiliser le lecteur sur le fait que l'état de l'art qui suit, au sujet de CA et CSA, sera fait dans un cadre élargi : on considère également les systèmes de protection parasismique positionnés au dernier étage de type AMD, ATMD,

etc., mais aussi des systèmes de renforcement variables inter-étages, [Pnevmatikos et Gantes, 2010](#). De plus on s'intéresse aussi : (i) au comportement des structures face à d'autres excitations externes que les séismes, comme le vent, [Adhikari et Yamaguchi, 1997](#), [Loh et al., 2000](#), (ii) aux méthodes de contrôle utilisées dans le cadre plus large de la théorie des vibrations, [Inman, 2006](#). Plusieurs types de structures se retrouvent à travers l'étude bibliographique qui suit : réacteurs nucléaires, bâtiments sismiquement isolés au niveau de la base, par exemple celui utilisé dans le cadre du benchmark<sup>10</sup>, [Nagarajaiah, 2006](#), [Narasimhan et al., 2006](#), toits, [Loh et al., 2000](#), ponts, [Lee et Kawashima, 2007](#), [Pujol et al., 2009](#). Établissons des critères pour classer les références bibliographiques. Le problème est d'améliorer le comportement des structures et des équipements face aux phénomènes naturels, dont les séismes. D'abord, il faut choisir des critères pour juger ce comportement. Ensuite, il faut choisir une représentation du système à partir de laquelle une loi de commande va être synthétisée. Le choix de l'algorithme de commande est important. Enfin, afin de pouvoir valider numériquement les schémas de contrôle, il faut choisir les signaux sismiques : s'agirait-il de signaux issus d'événements historiques ou artificiels ? Ces points seront traités par la suite.

**Indices de performance** Vu la problématique du compromis/conflit dont il a été discuté dans la [section 1.2](#), il apparaît naturel que la plupart des critères pour évaluer le comportement des schémas de contrôle portent sur le déplacement relatif au niveau de la base et les accélérations absolues (et donc les efforts) aux niveaux supérieurs de la structure. Contrairement à l'industrie nucléaire, en génie civil : (i) les structures sont plus souples (*i.e.* moins raides), c'est pourquoi on s'intéresse aussi aux déplacements inter-étages ; (ii) le déplacement relatif est associé aux considérations sur la sûreté de l'installation, tandis que les accélérations absolues concernent le confort des gens, [Soong, 1990](#), §3.5. Ces critères sont souvent définis sous forme de normes  $L_2$  et  $L_\infty$  ; pour prendre en compte l'effet induit aux structures de plusieurs signaux sismiques naturels, des moyennes quadratiques à partir de plusieurs signaux sismiques naturels sont utilisées dans [Narasimhan, 2004](#), [Narasimhan et al., 2008](#), §3.6 et l'ensemble des articles sur un benchmark - voir le [tableau 1.2](#) pour les repérer facilement. Si, au lieu de signaux sismiques, on considère des réalisations d'un processus stochastique, le critère sera défini par l'espérance mathématique des quantités déjà mentionnées, [Scruggs et Gavin, 2011](#), §30.3. Idéalement, ces critères devront être pris en compte dès le début de la phase de synthèse de la loi de commande, tâche qui s'avère assez difficile. C'est le cas du critère proposé par [Pham, 2010](#), [Politopoulos et Pham, 2011](#), à savoir le spectre de plancher. L'avantage de l'utiliser est que, à partir d'un seul critère, ce qui correspond à une courbe, on retrouve deux informations : sur le comportement de la structure isolée, mais aussi sur la tenue des équipements.

**Choix des signaux sismiques naturels** Des accélérogrammes associés aux événements sismiques historiques de forte intensité, qui ont produit des dégâts considérables, sont souvent utilisés dans la littérature du génie parasismique pour tester des schémas de contrôle (la plupart du temps à travers des simulations numériques). Le choix de signaux sismiques porte souvent sur des événements historiques importants dont ceux du [tableau 1.2](#). Dans ce tableau, à la fois les références bibliographiques, mais aussi les séismes sont ordonnés chronologiquement. Pour chaque

10. voir <http://satishnagarajaiah.blogs.rice.edu/research/publications>



événement sismique, on prend en compte l'ensemble des signaux enregistrés par toutes les stations sismiques, dans les directions horizontales de l'espace. À titre d'exemple, pour le séisme de Northridge, on considère tous les signaux générés par plusieurs stations dont celles de Newhall, Sylmar, Rinaldi, etc. [Narasimhan, 2004](#), Fig. 3.11. Le séisme Imperial Valley se confond dans le langage courant avec le nom de la station El Centro, nom qui sera retenu dans le [tableau 1.2](#).

**Choix des coordonnées du système et variables d'état** Il est habituel dans le domaine de l'automatique de travailler avec la représentation de systèmes dans l'espace des variables d'état. Un cas particulier est constitué par les systèmes d'EDO du premier ordre. En revanche, en mécanique il est plus commode d'écrire la dynamique des systèmes de type masse-amortisseur-ressort par des EDO de deuxième ordre. Le passage entre les deux types de représentation se fait en définissant le vecteur des variables d'état  $x$  comme étant le vecteur constitué des déplacements et des vitesses.

Le choix des coordonnées de système dépend de l'objectif de contrôle et est assez varié : par des coordonnées physiques relatives ou absolues, coordonnées généralisées relatives ou absolues, coordonnées modales complexes : voir les [tableaux 1.3](#) et [1.4](#) pour une liste de références et le choix correspondant. En particulier, la dynamique du système écrit en coordonnées modales simplifie la tâche de l'analyse de la propriété de contrôlabilité de modes individuels, [Inman, 2006](#), §7.8.

**Estimation des variables d'état et *output feedback*** Souvent le nombre de capteurs est inférieur au nombre des variables d'état. Dans ce cas, deux solutions sont envisageables :

- (i) effectuer la synthèse de lois de commande à partir d'un nombre réduit de variables appartenant au vecteur d'état. Des solutions de *static output feedback* ont été traitées dans [Yang et al., 1995](#), [Yang et al., 1994](#), [Soong, 1990](#), §3.2.1, [Loh et al., 2000](#), [Scruggs et Gavin, 2011](#), §30.4.4. En revanche, même dans cette situation, il se peut que les mesures fournies par l'ensemble réduit des capteurs ne soient pas de qualité, et il faut envisager une solution d'estimation d'état.
- (ii) estimer des variables d'état. Souvent les filtres de Kalman-Bucy sont utilisés en lien étroit avec la synthèse des lois de commande optimale linéaire, par application du principe de séparation : il s'agit du problème  $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$ . Plusieurs références peuvent être citées, incluses dans les [tableaux 1.3](#) et [1.4](#). Sinon, les observateurs de Luenberger et les observateurs réduits sont parfois utilisés [Preumont, 2002](#), §7.8. À part les filtres linéaires de Kalman-Bucy et de Luenberger, dans la littérature du génie parasismique je n'ai pas réussi à identifier des travaux sur des problèmes d'observateurs non linéaires.

## Lois de commande

**Continues vs discontinues** Une classification consiste à séparer les lois de commande en continues et discontinues (on parle dans ce dernier cas de commande *bang-bang*). Par exemple, les méthodes de Lyapunov (par exemple, par modes glissants, commande de Leitmann, etc.) permettent d'en déduire simultanément des lois continues et discontinues. En génie parasismique, ce sont les premières qui sont préférées, pour plusieurs raisons de nature pratique :

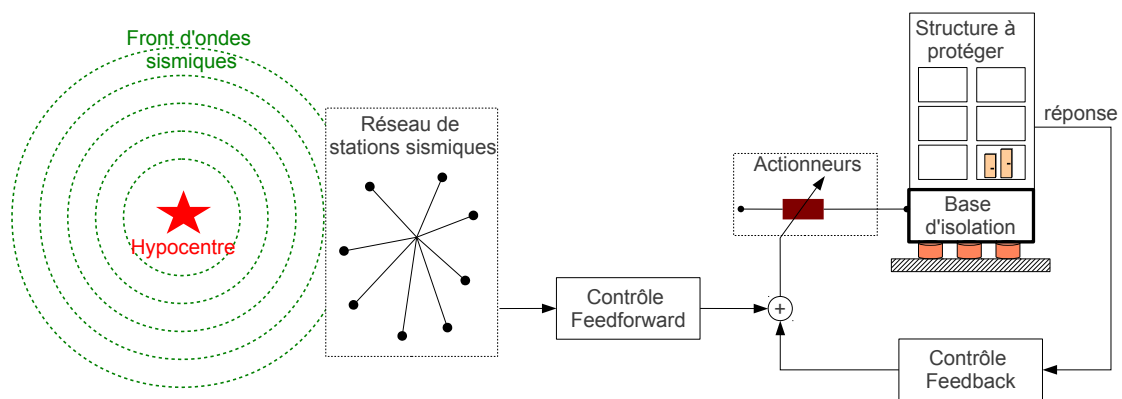
Séisme Référence		El Centro (1940)	Ardal (1977)	Tabas (1978)	Mexico City (1985)	Kala- mata (1986)	Loma Prieta (1989)	Erzin- can (1992)	North- ridge (1994)	Kobé (1995)	Jiji (1999)	Chi- Chi (1999)
Politopoulos et Pham, 2011			✓						✓			
Costa, 2010		✓										
Pnevmatikos et Gantes, 2010		✓		✓	✓	✓	✓		✓	✓		
Basu et Nagarajaiah, 2008									✓	✓		
Narasimhan <i>et al.</i> , 2008									✓			
Benchmark	Xu et Agrawal, 2008 Choi <i>et al.</i> , 2008 Agrawal <i>et al.</i> , 2006 Erkus et Johnson, 2006 Xu <i>et al.</i> , 2006 Nitta <i>et al.</i> , 2006	✓						✓	✓	✓	✓	
	Lee et Kawashima, 2007									✓		✓
	Narasimhan, 2004	✓						✓	✓	✓	✓	
	Jansen et Dyke, 2000	✓										
	Adhikari <i>et al.</i> , 1998	✓										
	Yang <i>et al.</i> , 1995	✓										
	Yang <i>et al.</i> , 1994	✓										
Soong, 1990		✓										
Kelly <i>et al.</i> , 1987		✓										

**Tableau 1.2** – Quelques signaux sismiques indicatifs utilisés pour valider en simulation des schémas de contrôle actif et semi-actif

- éviter d'introduire des chocs dans le système,
- les actionneurs physiques mettent toujours un certain temps pour répondre aux consignes, donc leur mode de fonctionnement est fondamentalement continu.

**Boucle fermée vs boucle ouverte** La grande majorité des références bibliographiques portent sur des lois de commande en boucle fermée. Celles-ci seront détaillées ci-après. En revanche, en ce qui concerne le contrôle en boucle ouverte, on peut y associer : (i) en CA les références [Soong, 1990](#), §3.1.2, et (ii) en CSA le travail de [Preumont, 2002](#), §12.5.

**Par anticipation (*feedforward*) et/ou par retour d'état (*feedback*)** Dans la [figure 1.14](#) un schéma de contrôle mixte est illustré.



**Figure 1.14** – Schéma de contrôle mixte feedforward-feedback

En général, dans la littérature du contrôle de structures et génie parasismique, ce n'est que la solution de contrôle par retour d'état qui est étudiée. Les raisons invoquées portent sur l'*adaptabilité* du système en boucle fermée face aux séismes inconnus ; dans le cas du CSA, la possibilité de modifier les caractéristiques de la structure non contrôlée (par exemple, en termes de déformées modales, fréquences de vibration, etc.) en temps-réel et d'imposer des nouvelles valeurs, etc. Une sélection de ces schémas de contrôle sera faite tout au long de cette section.

En revanche, des solutions de contrôle par anticipation sont rares dans la littérature du contrôle de structures : voir les articles de [Pnevmatikos et al., 2004](#), [Pnevmatikos et Gantes, 2010](#), [Occhiuzzi et al., 2006](#), où la thématique du contrôle est liée à celle de systèmes d'alerte avancée dont nous avons discuté dans la [section 1.5.2](#). Les auteurs proposent des solutions de protection parasismique qui consistent à faire varier en temps-réel les paramètres des contrôleurs pour tenir compte aussi des prédictions de certaines caractéristiques du séisme : PGA, distance à l'épicentre, contenu fréquentiel du signal, etc.

Par exemple, la solution proposée par [Pnevmatikos et Gantes, 2010](#), consiste à enregistrer à distance, au niveau d'une station, les deux premières secondes du signal sismique, isoler les composantes fréquentielles prédominantes, ensuite utiliser ces informations pour effectuer en temps-réel la synthèse d'une loi de commande par placement de pôles, tel que la structure soit protégée : les pôles du système en boucle fermée doivent être « suffisamment » éloignés par rapport aux composantes fréquentielles dominantes de la perturbation.

**Saturation. Lois de commande bornées vs variables d'état bornées** Les limites physiques des dispositifs de contrôle provoquent des limites sur les lois de commande. Par exemple, on peut parler de limitations : (i) en force, et (ii) de diverses caractéristiques et paramètres internes du dispositif de commande, comme l'amortissement et la raideur. Dans le cas de CA, le fait de ne pas prendre en compte la saturation de l'actionneur peut mener à l'instabilité, [Yang et al., 1995](#). Cette situation n'arrive jamais dans le cas du CSA, puisque les actionneurs semi-actifs, par leur mode de fonctionnement, ne font que dissiper de l'énergie.

Dans la littérature de l'automatique, des méthodes de synthèse de lois de commande bornées sont connues : (i) loi de Sontag, [Praly, 2003](#), (ii) celle de Freeman, [Freeman et Kokotović, 1996](#), (iii) par modes glissants, [Utkin, 1992](#).

**De type AC** Par la suite, nous allons détailler le choix sur les lois de commande utilisées en génie parasismique pour résoudre des problèmes de contrôle. Pour les méthodes de contrôle linéaires « classiques » (méthode de Nyquist, Bode, réponse fréquentielle, marges de phase et de module, etc.) on renvoie le lecteur au [Meirovitch, 1990](#), §5, [Preumont, 2002](#), §8. En revanche, les méthodes de contrôle « modernes » seront détaillées par la suite. On commence par les techniques linéaires, pour finir avec celles non linéaires. Le [tableau 1.3](#) contient une liste des références bibliographiques ordonnées par ordre chronologique. Dans le cas où la case sur les signaux sismiques natures est cochée, il faut se référer au [tableau 1.2](#) sur le choix de ces signaux.

La loi de **commande linéaire optimale** (LQR) est de loin la plus souvent utilisée en génie parasismique. Cette technique bien connue en automatique, [Anderson et Moore, 1971](#), [Naidu, 2003](#), [Hespanha, 2009](#), [Trélat, 2005](#), [Ionescu et Lupas, 1974](#), attire la communauté du contrôle de structures par la usage pratique de la fonction critère à minimiser. Deux façons équivalentes sont connus pour sa représentation : comme une intégrale (i) dans le domaine temporel, situation où on peut lui associer les significations physiques d'énergie élastique, cinétique, etc., et (ii) dans le domaine fréquentiel, [Perry, 2006](#), §6.7. Nous n'avons identifié que des applications de la méthode LQR à partir du premier type de représentations. Présentons-les ci-après. La dynamique du système est définie en termes de coordonnées physiques du système, mais aussi en termes de coordonnées généralisées, [Politopoulos et Pham, 2011](#), [Pham, 2010](#), §5, [Soong, 1990](#), §3.1. Des versions légèrement modifiées par rapport aux solutions LQR standard sont proposées dans [Soong, 1990](#), §3.3. Couplée aux problèmes d'observation par des filtres de Kalman-Bucy, on retrouve la méthode linéaire quadratique gaussienne ( $\mathcal{H}_2$ /LQG).

La technique de **placement des pôles**, bien connue en automatique, est toujours d'actualité en génie parasismique. En particulier, la méthodologie proposée dans [Pnevmatikos et Gantes, 2010](#), consiste à : (i) enregistrer en temps-réel le signal sismique en pied de la structure et effectuer une analyse par des outils fréquentiels (par exemple, transformée de Fourier) ou temps-fréquence (par exemple, ondelettes) pour identifier les fréquences dominantes ; (ii) ajuster en temps-réel les fréquences propres de la structure contrôlée de sorte que la partie imaginaire soit suffisamment loin des fréquences dominantes du signal sismique et au plus près de l'axe imaginaire. L'ajustement se fait donc par une analyse dans le plan complexe. D'autres algorithmes de contrôle qui consistent dans un premier temps à passer

Référence	Lois de commande									Variables d'état			Réduction de modèle du processus commandé	Signaux sismiques	
	LQR	$\mathcal{H}_2/\text{LQG}$	$\mathcal{H}_\infty$	Placement de pôles	Contrôle modal	Contrôle cubique	<i>Sky-hook</i> (actif)	Modes glissants	Commande de Leitmann	Coordonnées physiques relatives	Coordonnées physiques absolues	Coordonnées généralisées relatives		Naturels	Artificiels
Politopoulos et Pham, 2011 Pham, 2010, §5	✓	✓										✓	✓	✓	✓
Costa, 2010		✓						✓		✓		✓		✓	✓
Pnevmatikos et Gantes, 2010				✓						✓				✓	
Basu et Nagarajaiah, 2008	✓									✓				✓	
Lee et Kawashima, 2007	✓									✓				✓	
Agrawal <i>et al.</i> , 2006	✓	✓								✓				✓	✓
Xu <i>et al.</i> , 2006						✓				✓				✓	
Inman, 2006	✓				✓							✓	✓		
Narasimhan et Nagarajaiah, 2006 Erkus et Johnson, 2006		✓								✓				✓	✓
Narasimhan, 2004		✓	✓							✓				✓	✓
Preumont, 2002	✓	✓		✓			✓			✓		✓	✓		
Loh <i>et al.</i> , 2000	✓				✓							✓			
Adhikari <i>et al.</i> , 1998								✓		✓			✓	✓	✓
Adhikari et Yamaguchi, 1997								✓		✓					
Yang <i>et al.</i> , 1995 Yang <i>et al.</i> , 1994								✓		✓				✓	
Meirovitch, 1990	✓			✓	✓					✓		✓			
Soong, 1990	✓			✓	✓					✓		✓		✓	✓
Kelly <i>et al.</i> , 1987									✓		✓			✓	

**Tableau 1.3** – Classification des méthodes de contrôle actif pour la protection des structures en génie parasismique

depuis la représentation en coordonnées physiques vers la représentation en coordonnées modales, et ensuite à choisir les lois de commande à partir d'une analyse dans l'espace modal, peuvent être classés comme du placement de pôles : c'est le cas de [Inman, 2006](#), §7.9, [Soong, 1990](#), §3.4. On inclut dans cette rubrique la technique intitulée *modal damping* dans [Preumont, 2002](#), §5.5.1.

Au sens large, toute méthode de synthèse de lois de commande qui utilise une décomposition modale peut être incluse dans la rubrique du **contrôle modal** [Inman, 2006](#), §7.8. La synthèse de la loi de commande se fait à partir soit de la représentation : (i) de systèmes par des variables d'état, [Inman, 2006](#), §7.8, [Loh et al., 2000](#), [Meirovitch, 1990](#), §6.15, où les variables d'état sont choisies convenablement, sinon (ii) système  $M$ - $C$ - $K$  en coordonnées généralisées, [Inman, 2006](#), §7.9, [Soong, 1990](#), §3.4. Ensuite : (i) on choisit les paramètres des lois de commande par retour d'état, qui vont s'exprimer en termes de déplacements et vitesses généralisées ; cette étape ressemble au problème de placement des pôles, (ii) en déduire le vecteur complet de la loi de commande, compte tenu du nombre des actionneurs dont on dispose. La méthode du contrôle modal donne des résultats satisfaisants dans le cas où peu de modes contribuent à la réponse totale. Dans certains cas assez restrictifs, il est possible d'arriver à contrôler indépendamment chaque mode, c'est pourquoi on appelle la méthode *independent modal space control*, [Soong, 1990](#), §3.4. Son inconvénient majeur est le très grand nombre de capteurs nécessaires. Au contraire, si cette situation n'est pas possible, des solutions par moindres carrées sont proposées, [Soong, 1990](#), §3.4. Dans cette situation, la communauté s'intéresse entre autres aux problèmes de débordement<sup>11</sup> dus au couplage des modes : la distinction entre « débordement de contrôle » et « débordement d'observation » est faite dans la littérature, [Inman, 2006](#), §7.8-7.9, [Preumont, 2002](#), §9.13, [Soong, 1990](#), §4.1, [Meirovitch, 1990](#), §9.1.3, [Praly, 2003](#), § 9.13, [Politopoulos et Pham, 2011](#), § 2.2.

L'article [Loh et al., 2000](#), se distingue des autres par une technique où on essaie d'imposer l'allure des vecteurs propres (on impose en particulier l'allure des déformées modales), en plus des valeurs propres. Une particularité de l'approche présentée dans [Meirovitch, 1990](#), §6.15, est que, après avoir effectué la décomposition modale, au lieu de travailler avec des coordonnées complexes (*i.e.*  $\in \mathbb{C}$ ), une séparation est faite en partie réelle et partie imaginaire pour en déduire une dynamique d'équations réelles. Ensuite, le contrôle modal est effectué à partir de ces équations.

La loi de **commande linéaire robuste** par synthèse  $\mathcal{H}_\infty$  est classique en automatique, [Khargonekar, 1991](#), [Başar et Bernhard, 1991](#), [Başar et Bernhard, 2008](#), [Colaneri et al., 1997](#), [Duc et Font, 1999](#), [Zhou et al., 1996](#). La particularité du mode d'emploi proposé par [Narasimhan, 2004](#), §4, consiste à augmenter l'état du système par des filtres linéaires passe-bas en entrée et en sortie qui ont comme objectif de : (i) renseigner à l'algorithme de synthèse de loi de commande sur le contenu fréquentiel des signaux sismiques fictifs (en entrée), par exemple par des filtres de Kanai-Tajimi ou d'autres filtres linéaires d'ordre supérieur, et (ii) réduire la sensibilité du contrôleur vis-à-vis d'excitations qui sont riches en hautes composantes fréquentielles, au-delà la plus grande fréquence propre de la structure ; en d'autres mots, on aimerait que le contrôleur réagisse peu dans la gamme de fréquences où la structure ne répond pas de façon significative, c'est-à-dire au-delà une certaine fréquence.

---

11. en anglais : spillover

Sous le nom de **sky-hook** [Preumont, 2002](#), §6.3, on retrouve une technique de contrôle actif par retour d'état sur la vitesse absolue, qui consiste à « accrocher au ciel » un amortisseur. Soit  $c_1$  son coefficient d'amortissement, alors la force active générée par ce type de dispositif sera

$$u = c_1 \dot{z}_{a1} ,$$

où  $\dot{z}_{a1}$  est une vitesse absolue.

Passons aux méthodes de contrôle non linéaires. Plusieurs techniques de contrôle qui utilisent la théorie de Lyapunov<sup>12</sup> sont regroupées dans la classe *Variable Structure Systems* (VSS) – voir l'article-tutoriel en automatique de [DeCarlo et al., 1988](#), dont :

- (i) la synthèse de loi de commande par **modes glissants**<sup>13</sup>. Ce choix est souvent justifié par l'apport en robustesse et la possibilité de prendre en compte des non linéarités dans la dynamique de la structure isolée et de ses actionneurs. Dans [Adhikari et Yamaguchi, 1997](#), ce type de loi de commande est considéré supérieur aux techniques linéaires grâce à la propriété d'adaptation des caractéristiques des systèmes face aux perturbations inconnues (les signaux sismiques). À partir de leurs résultats en simulation, [Yang et al., 1995](#) et [Yang et al., 1994](#) tirent la conclusion que cette méthode est remarquable. Une des particularités des algorithmes proposés portent sur le choix de la hyper-surface stable, qui se fait soit : (i) par placement de pôles, soit (ii) par l'introduction d'un critère d'optimalité à minimiser et passage de l'état du système vers une *regular form*. Deux classes sont les lois continues et discontinues, sachant que les premières sont préférées.
- (ii) la loi de **commande de Leitmann** et ses variantes n'est que peu utilisée actuellement. Dans la littérature de l'automatique, celle-ci est connue comme une méthode de contrôle non linéaire robuste, étudiée par [Leitmann, 1979](#), [Corless et Leitmann, 1981](#), [Gutman et Leitmann, 1976](#), [Gutman, 1979](#) : deux propriétés sont étudiées de façon récurrente, à savoir *uniform boundedness* et *uniform ultimate boundedness*. Historiquement, les techniques à base de modes glissants se sont imposées. On remarque parfois que dans certains articles du génie parasismique, [Yang et al., 1995](#), [Yang et al., 1994](#), les auteurs ne font plus de différence entre VSS et modes glissants, au sens où les deux se confondent. En génie parasismique, citons l'article [Kelly et al., 1987](#) qui se distingue des autres par la loi de commande utilisée, ainsi que par le choix d'avoir effectué la synthèse à partir du modèle de système écrit en coordonnées absolues. Ces travaux seront repris dans le [chapitre 3](#).
- (iii) en partant d'actionneurs idéalisés de type amortissement-ressort ayant une non linéarité cubique à la fois sur la raideur, mais aussi sur l'amortissement, le **contrôle cubique**, [Xu et al., 2006](#), consiste à régler les paramètres de lois de commande de type

$$u = c_1 \dot{z}_{r1} + c_3 \dot{z}_{r1}^3 + k_1 z_{r1} + k_3 z_{r1}^3 .$$

où  $z_{r1}$  et  $\dot{z}_{r1}$  sont des déplacements et vitesses relatives et  $c_1$ ,  $c_3$ ,  $k_1$ ,  $k_3$  sont des constantes positives réelles. En conclusion de l'article [Xu et al., 2006](#), les auteurs précisent que les performances sont comparables au LQG.



Référence	Lois de commande							Systèmes de contrôle			Variables d'état			Réduction de modèle du processus commandé	Signaux sismiques	
	<i>Clipped-optimal</i> $\mathcal{H}_2/\text{LQG}$	<i>Clipped-<math>\mathcal{H}_\infty</math></i>	<i>Clipped-sliding mode</i>	<i>Skynhook</i> (semi-actif)	<i>Lyapunov bounded design, clipped-decentralized bang-bang</i>	Commande de Leitmann (semi-active)		À amortissement variable	À raideur variable	À frottement variable	Coordonnées physiques relatives	Coordonnées physiques absolues	Coordonnées généralisées relatives		Naturels	Artificiels
Scruggs et Gavin, 2011		✓			✓	✓		✓			✓					✓
Politopoulos et Pham, 2011	✓	✓						✓					✓	✓	✓	✓
Pham, 2010, §5																
Costa, 2010		✓		✓				✓		✓	✓		✓		✓	✓
Narasimhan <i>et al.</i> , 2008				✓						✓		✓				
Xu et Agrawal, 2008		✓								✓	✓				✓	✓
Lee et Kawashima, 2007	✓							✓			✓				✓	
Nitta <i>et al.</i> , 2006		✓			✓			✓		✓	✓				✓	
Xu <i>et al.</i> , 2006		✓						✓			✓				✓	
Narasimhan et Nagarajaiah, 2006		✓			✓			✓		✓	✓				✓	✓
Narasimhan, 2004		✓	✓		✓			✓	✓	✓	✓				✓	✓
Preumont, 2002, §12					✓			✓								
Jansen et Dyke, 2000	✓							✓		✓	✓				✓	
Dupont <i>et al.</i> , 1997										✓	✓					
Leitmann et Reithmeier, 1995																
Leitmann, 1994						✓		✓	✓		✓					

Tableau 1.4 – Classification des méthodes de contrôle semi-actif pour la protection des structures en génie parasismique



**De type CSA** Un schéma de contrôle semi-actif se caractérise par deux modes de fonctionnement : (i) passif, si les caractéristiques internes du dispositif sont fixées, par exemple au cas où il est saturé, sinon (ii) actif, si les caractéristiques internes du dispositif varient dans un domaine admissible de fonctionnement. La performance est en général augmentée pendant le mode actif, [Leitmann, 1994](#), [Leitmann et Reithmeier, 1995](#). En d'autres termes, en CSA on peut espérer attendre un niveau d'efficacité comparable au schéma de contrôle actif, mais en utilisant des actionneurs de complexité réduite.

Si, dans le cas du CA la loi de commande était typiquement une force, dans le cas du CSA la loi de commande est associée à l'une des caractéristiques intrinsèques de l'actionneur. La classification habituelle, [Narasimhan, 2004](#), [Pham, 2010](#), §2.3, consiste à distinguer :

- les systèmes de contrôle à amortissement variable
- les systèmes de contrôle à raideur variable
- les systèmes de contrôle à frottement variable, [Nishitani et al., 2000](#)

Dans le [tableau 1.4](#), le mot « clipped » apparaît de façon récurrente devant le nom de plusieurs méthodes de contrôle qui ont déjà été introduites dans la sous-section précédente. Il est utilisé pour souligner que ces schémas de contrôle comportent deux étapes :

- (i) dans un premier temps, l'effet de l'actionneur est assimilé à une force active qui devient une loi de commande  $u_{AC}$  dans un système contrôlé linéaire. Par des méthodes déjà présentées dans le [tableau 1.3](#), on effectue la synthèse de cette loi de commande active et ensuite,
- (ii) dans un second temps, on prend en compte la dynamique interne de l'actionneur, de sorte que la force réelle du dispositif se rapproche au mieux de  $u_{AC}$ . La véritable loi de commande semi-active va être : (i) un coefficient d'amortissement  $c_A$ , et/ou (ii) une raideur, et/ou (iii) une force normale, cette dernière ayant une influence sur une force de frottement.

Contrairement aux techniques « clipped » il est possible d'intégrer dès le début, dans la description du modèle contrôlé, la dynamique souvent non linéaire des actionneurs. Cela revient à réduire à une seule étape le processus de synthèse de lois de commande. C'est le cas des travaux de [Leitmann, 1994](#), [Leitmann et Reithmeier, 1995](#). Dans ces articles, deux types de méthodes de synthèse de lois de commande sont proposées : (i) en utilisant des méthodes de Lyapunov, pour construire ce qu'on appelle la loi de commande de Leitmann, et (ii) minimiser le taux de décroissance de l'énergie engendrée par les composantes amortisseur-raideur : il s'agit de l'énergie d'amortissement plus celle de déformation (tout en ignorant l'énergie cinétique, sinon voir la méthode de *dissipation maximale de l'énergie* dans [Jansen et Dyke, 2000](#), §3.3). Un bon complément où ces notions sont bien expliquées est donnée par [Ghavamian, 1998](#), §II.4. La conclusion de l'article [Leitmann, 1994](#), est que le premier schéma semble être supérieur au second au sens de diminuer les effets de résonance.

La méthode **skyhook** peut être appliquée au cas CSA aussi. Dans [Narasimhan, 2004](#), §5.4, une loi de commande de type

$$c_A(t) = \begin{cases} c_A^{\max} & \text{si } \dot{z}_{r1}(t) \dot{z}_{a1}(t) > 0 \\ c_A^{\min} & \text{sinon} \end{cases}$$

12. en anglais : Lyapunov-based methods

13. en anglais : sliding mode control, [Utkin, 1992](#)

est appelée *skyhook control*, où  $c_A(t)$  est le coefficient d'amortissement visqueux de l'actionneur, sachant qu'il est compris entre deux limites  $c_A^{\min}$  et  $c_A^{\max}$  qui sont des nombres réels positifs ;  $\dot{z}_{r1}$  et  $\dot{z}_{a1}$  représentent la vitesse relative et l'autre absolue, respectivement, de la tige de l'actionneur. Pour éviter la discontinuité, une grande variété de fonctions régularisantes sont utilisées : on fait référence aux travaux Poussot-Vassal *et al.*, 2011, du domaine de l'automobile.

Une autre méthode de CSA qui utilise une fonction de Lyapunov  $V$  est présentée dans Choi *et al.*, 2008 : on prend comme fonction  $V$  la somme de l'énergie cinétique plus celle élastique de la structure isolée, et ensuite on extrait la loi de commande à partir de sa dérivée le long des trajectoires du système. C'est pareil dans le cas de l'article Pujol *et al.*, 2009, où on donne un nom au contrôleur ainsi synthétisé : **damping control**. Il faudra faire attention à ne pas la confondre avec la méthode qui porte le même nom dans la littérature de l'automatique, Sepulchre *et al.*, 1997, §3.5.2.

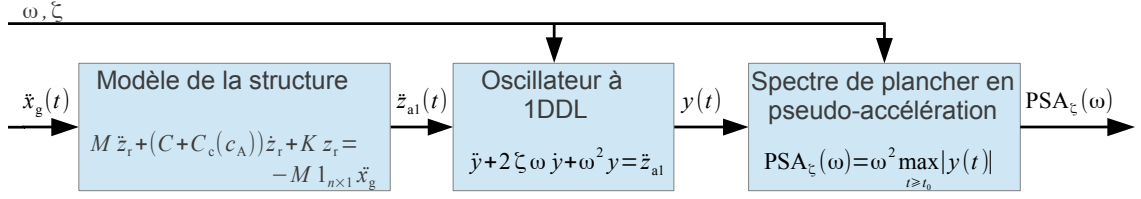
Parfois, des relations empiriques sont proposées dans la littérature. C'est le cas de Occhiuzzi *et al.*, 2006, où l'amortissement du dispositif semi-actif  $c_A(t)$  est une fonction qui varie linéairement entre une valeur minimale  $c_A^{\min}$  et l'autre maximale  $c_A^{\max}$ , avec une pente ajustée en temps-réel par rapport aux prédictions de la PGA. Ces prédictions sont issues d'un système d'alerte avancée.

D'autres techniques de contrôle d'amortisseurs sont passées en revue dans Jansen *et Dyke*, 2000, dont le *Decentralized Bang-Bang Control*, technique utilisée expérimentalement dans Pham, 2010, §7.4.

**Atténuation de perturbations** Des références bibliographiques en automatique sur l'atténuation de perturbation incluent Isidori, 1995, § 9.5, Isidori, 1999, § 13.

### 1.5.6 Travaux antérieurs

La méthodologie proposée par Politopoulos dans ses travaux de recherche, qui incluent l'encadrement de la thèse de Pham, 2010, §3–5, et le stage de fin d'études de Master de Costa, 2010, consiste à exprimer le conflit entre les deux quantités, à savoir les accélérations absolues au niveau superstructure *vs* déplacements relatifs au niveau de la base, par un seul critère constitué par le spectre de plancher en pseudo-accelération. En d'autres termes, le problème initial qui consistait à définir et comparer divers critères sur ces accélérations absolues et déplacements relatifs, comme c'est fait couramment dans la littérature, a été déplacé vers l'analyse de la réponse en termes de spectres de plancher. Mais : (i) il s'agit d'une analyse « qualitative », et (ii) le spectre de plancher n'est pas pris en compte explicitement dans la construction de la loi de commande. Néanmoins, il semble que cette approche convient mieux pour les structures du domaine du nucléaire.



**Figure 1.15** – Schéma bloc avec les opérations nécessaires pour calculer le spectre de plancher en pseudo-accélération au niveau de la base d’une structure linéaire à 2 DDL de type masse-ressort-amortissement

**Sur les spectres de plancher et le problème de contrôle en vue de la réduction des pics** Pour simplifier l’exposé, nous avons représenté dans la [figure 1.15](#) la chaîne des opérations successives à effectuer pour calculer un spectre de plancher en pseudo-accélération, d’une structure linéaire à 2 DDL de type masse-ressort-amortissement, constituée par une base et une superstructure. Tous les détails de construction de cette structure se trouvent dans la [section 2.1.2](#) et, pour éviter la répétition, on convient que toutes les notations qui ne seront pas explicitées par la suite, se trouvent dans cette sous-section.

Dans la [figure 1.15](#), le signal sismique  $\ddot{x}_g(t)$  constitue l’entrée du bloc qui modélise la dynamique de la structure isolée au niveau de la base. Si on suppose que tous les paramètres sont fixés,  $c_A$  inclus, on retrouve une solution de contrôle passif. Ensuite, le signal  $z_{a1}(t)$  qui représente l’accélération absolue au niveau de la base sert d’entrée pour le bloc suivant, un filtre linéaire de second ordre. Physiquement il correspond à un oscillateur à 1 DDL, dont le déplacement relatif (par rapport à son propre repère) maximal sera utilisé pour calculer le spectre de plancher. Pour des valeurs croissantes de  $c_A(\xi_b)$ , où plus précisément  $c_A = 2 \xi_b \omega_b (m_b + m_s)$ , on obtient le résultat de la [figure 1.4a](#). Par la suite on se pose la question de savoir comment expliquer les pics autour des fréquences propres de la structure.

Il se trouve que l’indication sur les fréquences propres est liée à la sensibilité du modèle de la structure. Sachant qu’il s’agit d’un système linéaire, on poursuit par une analyse des fonctions de transfert. Le diagramme de Bode de la fonction de transfert entre le signal d’excitation  $\ddot{x}_g(t)$  et  $\ddot{z}_{a1}(t)$ , à savoir

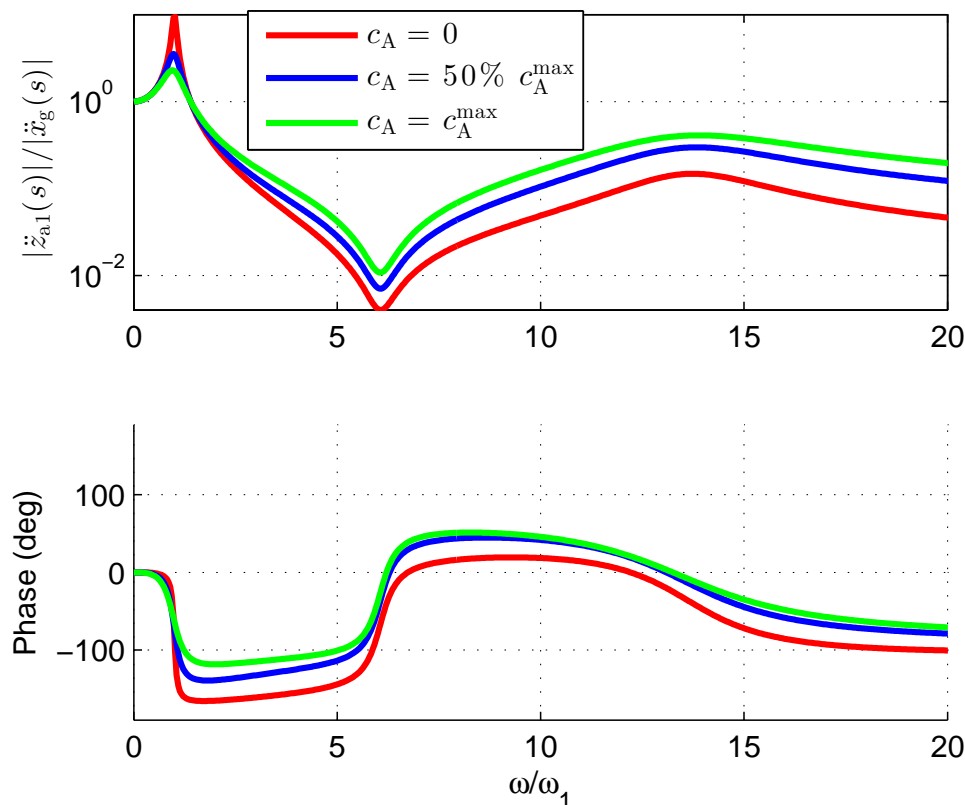
$$\frac{\ddot{z}_{a1}(s)}{\ddot{x}_g(s)} = e_1' \left( s^2 M + s(C + C_c(c_A)) + K \right)^{-1} M 1_{2 \times 1} + 1, \quad (1.11)$$

où  $s$  est la variable de Laplace, est illustré dans la [section 1.5.6](#) et montre, la sensibilité de la structure autour de la première fréquence propre  $\omega_1$  et de la seconde fréquence propre située plus à droite sur l’abscisse.

[Politopoulos, 2008](#) et [Pham, 2010](#), §4, vont plus loin dans l’analyse des causes de l’apparition des pics sur le spectre de plancher, en partant de la décomposition modale en coordonnées généralisées relatives :

$$z_r(t) = \varphi_1 q_{r1}(t) + \varphi_2 q_{r2}(t), \quad (1.12)$$

où  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont les déformées modales. Il se trouve que le module de la fonction de transfert entre  $\ddot{x}_g(t)$  et  $q_{r1}(t)$  a un premier pic autour de la première fréquence propre, tandis qu’autour de la seconde fréquence propre on retrouve un plateau quasi-plat. D’où vient donc l’amplification autour de la seconde fréquence propre sur le spectre de plancher ? Pour répondre, le module de la fonction de transfert entre  $\ddot{x}_g(t)$  et  $q_{r2}(t)$  montre un pic visible autour de la seconde fréquence propre. En



**Figure 1.16** – Diagramme de Bode de la fonction de transfert (1.11) d'une structure linéaire à deux degrés de liberté sismiquement isolée au niveau de la base par des dispositifs passifs de type raideur-amortisseur fixe

effet, c'est le signal  $q_{r2}(t)$  qui est responsable de l'accumulation de contenu spectral autour de la seconde fréquence propre. En revanche, le module de la même fonction de transfert a un premier pic très visible autour de la première fréquence propre. Politopoulos et Pham ont montré que celui-ci vient par le couplage avec  $q_{r1}(t)$ . Détaillons ce point.

En écrivant la dynamique des équations couplées (pour rappel la matrice  $C + C_c(c_A)$  est non modale) en coordonnées généralisées, une analyse de sensibilité des paramètres montre que l'influence de  $q_{r2}(t)$  sur  $q_{r1}(t)$  est négligeable, de même que l'influence de  $\ddot{x}_g(t)$  sur  $q_{r2}(t)$  est négligeable (on parle dans ce dernier cas de quasi-orthogonalité spatiale entre les vecteurs  $\varphi_2$  et la distribution spatiale de l'excitation  $M_{12 \times 1} \ddot{x}_g$ ). Pour simplifier cet exposé, présentons les équations en incluant ces approximations :

$$\begin{cases} \ddot{q}_{r1} + 2\xi_1\omega_1\dot{q}_{r1} + \omega_1^2 q_{r1} = \cancel{L_1\ddot{q}_{r2}} + L_2\ddot{x}_g \\ \ddot{q}_{r2} + 2\xi_2\omega_2\dot{q}_{r2} + \omega_2^2 q_{r2} = L_3\dot{q}_{r1} + \cancel{L_4\ddot{x}_g} \end{cases} \quad (1.13)$$

où les paramètres  $L_i \in \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ . Les taux d'amortissement  $\xi_1, \xi_2 \in (0, 1)$  sont proches de zéro. En particulier,  $L_4$  est proportionnel à  $\varphi_2' M_{12 \times 1}$  et  $L_1$  est proportionnel à  $\varphi_1'(C + C_c(c_A))\varphi_2$ .

Pour résumer ce qui a été dit plus haut, on s'attend à pouvoir améliorer les spectres de plancher en utilisant des algorithmes de contrôle qui seront capables de pénaliser  $q_{r1}$  et  $q_{r2}$ . Cette piste est poursuivie dans la synthèse de lois de commande semi-actives sur deux types de structures à 2 DDL qui seront présentées par la suite.

En résumé, toutes les informations présentées plus haut aident à justifier et prendre

conscience de quelques limitations en performance des systèmes linéaires avec isolation passive. Du même, on les retrouve sur des systèmes non linéaires, par exemple avec des patins à frottement sec. En particulier, l'axe de travail de Politopoulos consiste à utiliser comme critère de performance le spectre de plancher. On constate l'apparition d'un conflit lié à l'incapacité de réduire des pics, au bon gré de l'utilisateur. Cette constatation motive l'exploration d'autres pistes sur des systèmes de contrôle plus sophistiquées, pour essayer de surmonter cette limite en performance. Un candidat est la solution de contrôle semi-actif qui sera analysée par la suite.

### Sur le contrôle semi-actif et le contrôle actif

**Travaux de thèse de Pham, 2010, §5 et l'article de Politopoulos et Pham, 2011** Dans la continuité de ce qui a été présenté plus haut, reprenons le même modèle de la structure à 2 DDL avec la seule modification qui consiste à tolérer une variation en temps-réel de l'amortissement  $c_A$ . Ceci revient à considérer un système d'isolation mixte entre la base et le sol, constitué de dispositifs passifs (une raideur fixe  $k_b$  et un amortissement fixe  $c_b$ ) et un dispositif semi-actif idéalisé modélisé par une force d'amortissement variable  $\dot{z}_{r1}(t) c_A(t)$ . La question qui se pose est de savoir s'il est possible par le réglage de  $c_A$  en temps-réel à partir d'un algorithme de contrôle à proposer, d'améliorer les spectres de plancher et retrouver des meilleurs résultats par rapport aux dispositifs passifs. Pour réussir à calculer  $c_A$  (la véritable loi de commande), un schéma en deux étapes est utilisé, Pham, 2010, §5, Politopoulos et Pham, 2011 :

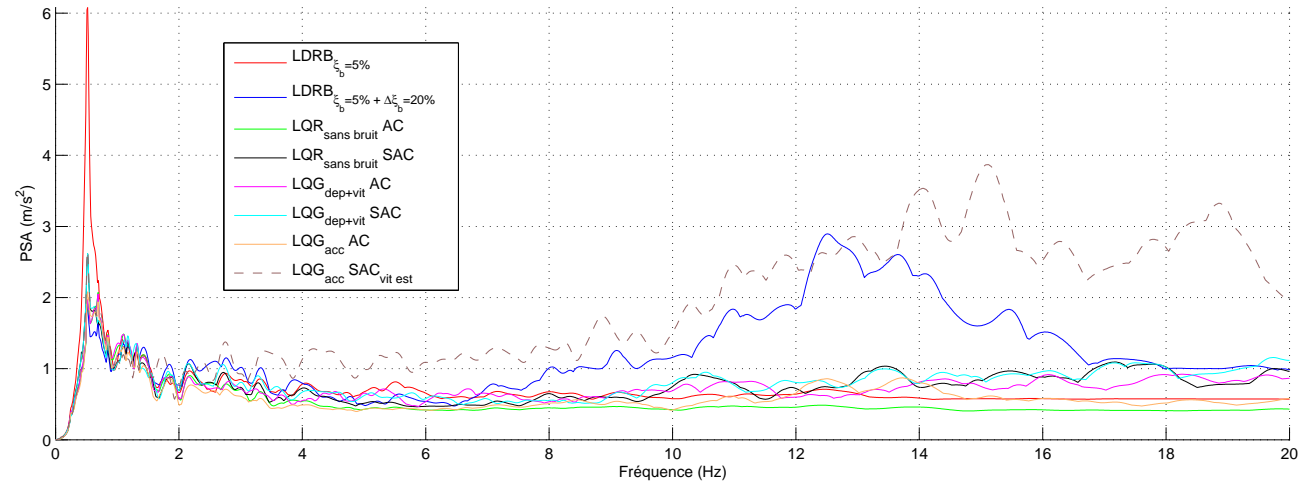
- (i) on restreint le problème à un cadre de CA, où la dynamique de la structure et des actionneurs peut être modélisée par un système d'équations différentielles ordinaires (EDO) linéaires, ce qui permettra la synthèse de la loi de commande optimale quadratique linéaire (LQR). Physiquement, cette loi de commande  $u_{AC}$  représente une force et constitue la valeur de référence à prendre en compte pour la seconde étape.
- (ii) on essaye d'approcher la valeur de  $u_{AC}$ , au mieux, par les moyens d'action physiques dont on dispose. Sachant que le dispositif semi-actif idéalisé de type amortisseur visqueux génère une force  $c_A \dot{z}_{r1}$ , la saturation est prise en compte de la façon suivante :

$$c_A = \begin{cases} \left| \frac{u_{AC}}{\dot{z}_{r1}} \right|, & \text{si } u_{AC} \dot{z}_{r1} < 0 \text{ et } c_A^{\min} |\dot{z}_{r1}| < |u_{AC}| < c_A^{\max} |\dot{z}_{r1}| \\ c_A^{\max}, & \text{si } u_{AC} \dot{z}_{r1} < 0 \text{ et } |u_{AC}| \geq c_A^{\max} |\dot{z}_{r1}| \\ c_A^{\min}, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.14)$$

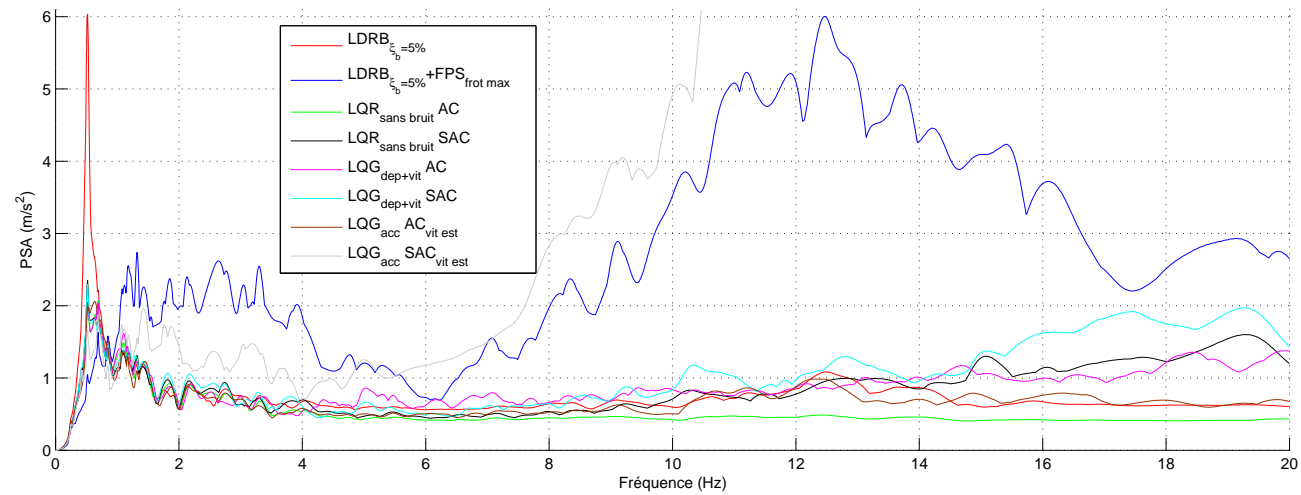
Il est possible, en pratique, que la valeur de  $\dot{z}_{r1}$  ne soit pas accessible directement à l'aide des capteurs. Dans ce cas, il faudra remplacer la vitesse de la base par son estimation  $\hat{\dot{z}}_{r1}$  dans la relation (1.14).

La figure 1.17a est révélatrice de la façon de présenter les améliorations attendues sur les spectres de plancher en pseudo-accélération. Analysons les courbes l'une après l'autre, tout en gardant les mêmes notations utilisées dans Pham, 2010, §5 :

- Sur la première courbe, la notation LDRB vient de *Low Damping Rubber Bearing* et représente des appuis élastomères à faible amortissement. Elle est succédée par l'indication sur le taux d'amortissement  $\xi_b$  mis entre la base et le sol. La valeur de 5% correspond à un taux d'amortissement faible. Le premier pic situé autour



(a) dispositif semi-actif de type amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable



(b) dispositif semi-actif de type patin à frottement sec à forcé normale variable

**Figure 1.17** – Spectres de plancher au niveau de la base pour un taux d'amortissement  $\zeta = 2\%$ . Structures à 2 DDL sismiquement isolées au niveau de la base par un système d'isolation mixte qui diffèrent par le dispositif semi-actif utilisé

de la première fréquence propre (typiquement de l'ordre de 0.5 Hz pour ce type de structures) traduit un grand déplacement relatif au niveau de la base de la structure isolée. Une solution pratique pour réduire ce pic consiste à augmenter la valeur du taux d'amortissement

- Si on rajoute un taux d'amortissement additionnel  $\Delta\xi_b = 20\%$ , en effet, on arrive à réduire ce premier pic, au prix de l'amplification autour de la seconde fréquence propre. Ce résultat peut être visualisé sur la seconde courbe. Ces deux premières courbes montrent la philosophie du compromis qu'il faut assurer avec les dispositifs passifs, dont il a été discuté lors de la [section 1.3.1](#).
- Avec une loi de commande active de type LQR, on voit sur la troisième courbe qu'il est possible de garder un niveau du premier pic comparable à la seconde courbe ; contrairement à cette dernière, on retrouve un plateau quasi-plat autour de la seconde fréquence propre de vibration. Le choix de la fonction critère est fait en termes d'énergie modale, avec un paramètre grand pour pénaliser le second mode de vibration, ce qui permet de réduire effectivement l'amplification des modes supérieurs. En d'autres termes, par le choix astucieux de la loi de commande, on va injecter en boucle fermée de l'amortissement modal dans la dynamique du second mode. Politopoulos et Pham vérifient après la phase de synthèse de la loi de commande, que la fonction de transfert en boucle fermée entre l'excitation  $\ddot{x}_g$  et la sortie  $\ddot{z}_{a1}$  présente un plateau quasi-plat autour de la seconde fréquence propre de vibration, tandis que le premier pic est comparable au cas de la fonction de transfert correspondant à la situation  $\text{LDRB}_{\xi_b=5\%+\Delta\xi_b=20\%}$
- Si la loi de commande du cas précédent est utilisée en tant que référence pour l'algorithme de contrôle semi-actif (1.14), on retrouve le résultat de la quatrième courbe indiquée par  $\text{LQR}_{\text{sans bruit}} \text{ SAC}$ . Une certaine dégradation de performance pour les modes supérieurs peut être observée, par rapport au cas précédent.
- Les quatre courbes qui suivent portent sur la simulation des lois de commande linéaires quadratiques gaussiennes (LQG). Pour les deux premières on suppose que l'on dispose de capteurs de mesure du déplacement relatif et vitesse relative de la base, d'où la notation  $\text{LQG}_{\text{dép+vit}}$ . La dernière de ces deux courbes porte sur une loi semi-active qui utilise comme référence la première, à savoir une loi active. Par la lecture des résultats, on retrouve les mêmes tendances pour les deux.
- Enfin, pour les deux dernières courbes on suppose mesurer que les accélérations absolues de tous les étages, d'où la notation  $\text{LQG}_{\text{acc}}$ . La première loi de commande de type actif sert de référence pour la seconde, de type semi-actif. On remarque que pour le calcul de la loi de commande semi-active (1.14), vu les capteurs dont on dispose, nous n'avons pas accès à la vitesse de la base, c'est pourquoi la solution a été d'estimer cette information. D'où l'indication sur la vitesse estimée sur la dernière courbe au niveau de la légende. Une forte dégradation en performance est observée.

**Travaux de stage du master recherche de Costa, 2010** Plusieurs systèmes d'isolation sismique à force de frottement variable sont étudiés dans la littérature, dont le dispositif expérimental présenté dans [Soong et Constantinou, 1994](#), pp. 337–339. En ce qui concerne le principe de fonctionnement de ce dernier, précisons que le poids de la structure repose sur : (i) des frotteurs, et (ii) des chambres où on fait circuler un fluide à haute pression. Tous ces dispositifs sont mis entre le sol et la base. De cette façon, par l'ouverture/fermeture de soupapes en temps-réel, on



peut contrôler la force normale  $F_N(t)$  qui intervient dans la formule de la force de frottement

$$F_{\text{fr}}(t) = \mu F_N(t) \text{sign}(\dot{z}_{r1}(t)), \quad (1.15)$$

où  $\mu$  est le coefficient de frottement. Ajoutons les contraintes physiques  $F_N(t) \in [F_N^{\min}, F_N^{\max}]$ , où  $0 \leq F_N^{\min} < F_N^{\max}$ .

Une partie du travail de stage de master recherche de [Costa, 2010](#), consiste à étudier le comportement en termes de spectres de plancher de la structure qui utilise ce dispositif semi-actif. Il reprend la procédure à deux étapes de Politopoulos qui sera légèrement modifiée : (i) à la première étape,  $u_{AC}$  est calculé soit par LQR ou LQG, soit par modes glissants ; (ii) à la seconde étape,  $F_N(t)$  sera traité en tant que loi de commande de type semi-actif, et sa valeur sera calculée telle que la force de frottement approche au mieux, la loi CA calculée à la première étape :

$$F_N(t) = \begin{cases} \frac{|u_{AC}(t)|}{\mu}, & \text{si } u_{AC}(t) \dot{z}_{r1}(t) < 0 \text{ et } \mu F_N^{\min} < |u_{AC}(t)| < \mu F_N^{\max} \\ F_N^{\max}, & \text{si } u_{AC}(t) \dot{z}_{r1}(t) < 0 \text{ et } |u_{AC}(t)| \geq \mu F_N^{\max} \\ F_N^{\min}, & \text{sinon} \end{cases}$$

voir [Costa, 2010](#), §3.3.2.

Plus précisément, la structure à 2 DDL du paragraphe antérieur (correspondant aux résultats de simulation de la [figure 1.17a](#)) est reprise avec la seule différence qu'il faut remplacer le dispositif semi-actif de type amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable par un frotteur à force normale variable. Si la formule compacte (1.15) a été utilisée pour le calcul de la loi de commande, en revanche, la régularisation (2.30) a été utilisée pour le modèle de structure.

Nous avons refait les simulations en suivant la même approche que [Costa, 2010](#). Pour faciliter la lecture, les résultats de simulation illustrés dans la [figure 1.17b](#) gardent les mêmes notations utilisées dans le paragraphe antérieur. Seulement la seconde courbe a un élément nouveau : au dispositif élastomère à taux d'amortissement fixe entre la base et le sol  $\xi_b = 5\%$  on vient rajouter un frotteur passif : la force normale est prise égale au poids de la structure. Si on compare les résultats des [figures 1.17a](#) et [1.17b](#), il faut remarquer une amplification plus prononcée vers les hautes fréquences dans la [figure 1.17b](#), observation qui suit l'intuition physique : les discontinuités génèrent des signaux à bande fréquentielle large, [DeCarlo et al., 1988](#), pp. 228, qui vont exciter la structure sur une plage fréquentielle plus large.

Une autre idée qui semble donner des résultats satisfaisants en simulation a été proposée par Politopoulos et consiste à reprendre le schéma de contrôle semi-actif à deux étapes précisée ci-haut, avec la différence qu'au premier pas, au lieu d'utiliser une loi de commande (qui correspond à une force) active, et bien on utilise une loi de CP filtrée par un filtre passe bas ayant une fréquence de coupure trois fois supérieure à la fréquence d'isolation (*i.e.* la fréquence fondamentale de la structure isolée). En d'autres termes, si on reprend les [figures 1.17a](#) et [1.17b](#), et plus précisément la seconde courbe identifiée par LDRB avec un taux d'amortissement total de 25%, on cherche à réaliser une référence pour le CSA (qui sera calculée dans un second temps) capable de donner un premier pic situé assez bas et de couper (en filtrant) tout le contenu en hautes fréquences. Il est à noter que, pareil comme pour le cas de la référence active, la référence passive n'est pas toujours physiquement réalisable par des moyens CSA (à cause du déphasage introduit par le



filtre qui traduit un retard en temps). L'inconvénient de cette méthode est qu'elle n'est pas efficace quand les modes supérieurs ne sont pas excités à cause de leur couplage avec le premier mode, mais dans le cas où ils sont directement excités par l'excitation sismique (par exemple mouvement de rotation<sup>14</sup> de la base).

## 1.6 Liste de publications et communications orales

Nos travaux de recherche ont fait l'objet de deux publications dans des conférences internationales avec comité de lecture :

- (i) « A robust nonlinear semi-active control for base seismically-isolated structures », C.S. Teodorescu, S. Diop, I. Politopoulos, M. Benidir, 21st Mediterranean Conference on Control and Automation (MED'13), Crète, Grèce, 25-28 Juin 2013.
- (ii) « A semi-active controller tuning and application to a base seismically-isolated structure », C.S. Teodorescu, S. Diop, I. Politopoulos, M. Benidir, 12th Biannual European Control Conference (ECC'13), Zurich, Suisse, 17-19 Juillet 2013.

En dernière année de thèse, avec l'intitulé « Contrôle actif et semi-actif des structures sous sollicitations sismiques », j'ai pu présenter des avancées sur ce travail de recherche dans le cadre de plusieurs activités de *communication orale* dont :

- (i) Les 13<sup>es</sup> Journées Scientifiques de la Direction déléguée aux Activités Nucléaires de Saclay (DANS), qui ont eu lieu à Neurospin, CEA Saclay, 23-24 mai 2013.
- (ii) La 2<sup>e</sup> Journée des thèses du Département de Modélisation des Systèmes et Structures (DM2S), qui a eu lieu à l'INSTN, CEA Saclay, 4 avril 2013.
- (iii) La 2<sup>e</sup> Journée des doctorants de l'École Doctorale Sciences et Technologies de l'Information, des Télécommunications et des Systèmes (STITS), qui a eu lieu à SUPELEC, Gif-sur-Yvette, 21 mars 2013.
- (iv) La journée scientifique dédiée à la création de l'Institut SEISM (*Seismology and Earthquake Engineering for Risk Assessment Paris Saclay Research Institute*), qui a eu lieu à l'INSTN, CEA Saclay, 19 décembre 2012.

## 1.7 Synthèse

Ce chapitre présente de façon succincte : le cadre plus général dans lequel cette thèse s'inscrit, les motivations, la problématique, les objectifs, l'état de l'art et enfin, finit par des contributions issues de ce travail de recherche. Le problème de contrôle semi-actif posé dans la [section 1.3.2](#) part d'un besoin spécifique de l'ingénieur du génie parasismique et est exprimé en utilisant le langage courant de l'automatique. Ce problème s'articule en trois parties : (i) le système d'équations est suffisamment général pour permettre de travailler avec des modèles linéaires ou non linéaires, avec incertitudes non structurées, de structures isolées décrites en coordonnées relatives, absolues ou modales : cet aspect sera détaillé dans le chapitre suivant, dans la [section 2.1](#) ; (ii) les hypothèses de travail, dont celles sur

---

14. en anglais : rocking

les signaux sismiques : trois représentations seront proposées et étudiées dans le chapitre suivant, à la [section 2.3](#) ; (iii) l'objectif de synthèse de lois de commande capables, entre autres, d'améliorer le spectre de plancher. Le [chapitre 3](#) sera dédié entièrement à la proposition d'une solution de contrôle à ce problème.

Dans la [section 1.3.3](#) nous avons évoqué une approche qui utilise les outils temps-fréquence. Ils ont un intérêt certain pour la synthèse de lois de commande capables de mieux contrôler les composantes transitoires des entrées et sorties d'un système dynamique. Notamment on vise la distribution de Wigner-Ville, qui sera reprise dans le chapitre suivant, et utilisée pour analyser et représenter les signaux sismiques dans la [section 2.2](#). Parmi ses propriétés les plus intéressantes, nous avons identifié les « marginales ». Celles-ci nous permettront dans le [chapitre 3](#) à la [section 3.2.3](#) de proposer et étudier une fonction critère en temps-fréquence : en suivant le chemin de la théorie du contrôle optimal LQR, nous allons tester si par la minimisation d'un critère de ce type, il est possible d'effectuer la synthèse de lois de commande.

L'état de l'art porte sur plusieurs aspects qui aident le lecteur à mieux situer les travaux effectués dans les [chapitres 2](#) et [3](#), par rapport à la littérature. Notamment, à partir des tableaux de synthèse [1.3](#) et [1.4](#), le lecteur peut se faire une première idée sur le choix des : (i) principales lois de commande étudiées par les communautés du génie parasismique et dynamique des structures pour résoudre divers problèmes de contrôle ; en particulier, la loi de commande de Leitmann qui est au cœur de la solution proposée dans le [chapitre 3](#) est très peu utilisée ; (ii) coordonnées du système utilisé pour représenter la dynamique des modèles de structure, en vue de la synthèse de lois de commande : les coordonnées absolues sont très peu utilisés tandis qu'elles constituent une clé pour améliorer les spectres de plancher, comme on verra dans le [chapitre 3](#).



# Chapitre 2

## Modélisation

L'objectif de ce chapitre est de reprendre le problème de contrôle formulé dans la [section 1.3.2](#) afin d'en détailler systématiquement les hypothèses de départ. Nous proposerons alors, au [chapitre 3](#) une solution à ce problème, en nous reposant sur les développements et résultats du présent chapitre.

Dans un premier temps, nous donnerons plus de détails sur la modélisation de structures sismiquement isolées à la base et sur l'actionneur semi-actif qui est disposé au niveau de la base. Ce n'est pas uniquement à la dynamique physique de l'ensemble que nous nous intéressons, mais aussi à une description adéquate à la résolution du problème de contrôle auquel on s'intéresse. C'est pourquoi plusieurs modèles seront présentés, à la fois en coordonnées physiques mais aussi modales. L'intérêt de la décomposition en modes de vibration est qu'elle permettra d'avoir un accès plus fin au comportement global de la structure isolée secouée par un séisme. Les fréquences propres et les déformées modales, ou plus généralement les vecteurs propres, d'un système de type masse-amortissement-raideur constituent des informations pertinentes (adéquates) à prendre en compte pour la synthèse de lois de commande ayant comme objectif l'amélioration de spectres de plancher. Intuitivement, le mot spectre nous fait penser à des fréquences de vibration. Il est nécessaire d'éclaircir le lien entre ces informations.

L'actionneur de type semi-actif est un amortisseur visqueux. Sachant que dans notre étude il est contrôlé par la variation du coefficient d'amortissement (qui d'ailleurs sera traité en tant que loi de commande dans le [chapitre 3](#)), il convient de noter que ce type de modélisation va introduire des non linéarités dans le système d'équations. Une autre source de non linéarités est constituée d'un patin à frottement sec, fixé au niveau de la base.

Dans un deuxième temps, nous analyserons en particulier des signaux sismiques forts : El Centro (daté de 1940) et Northridge (daté de 1994). La non stationnarité des signaux sismiques et notre souhait de mieux caractériser leur comportement transitoire, nous motive à utiliser des outils d'analyse temps-fréquence. En particulier, nous nous intéressons à la distribution de Wigner-Ville (DWV) et à ses propriétés dont les « marginales » qui seront reprises dans le [chapitre 3](#). Un exercice assez simple consiste à effectuer une comparaison entre les résultats de la DWV, de la transformée de Fourier et du spectre de plancher. À l'aide d'illustrations nous allons pouvoir nous faire une première idée de la façon dont ces outils sont liés entre eux. Plus loin, nous proposerons d'utiliser la DWV des signaux à analyser comme une fonction coût à minimiser, dans le troisième volet de ce chapitre.

Dans un troisième temps, nous nous poserons le problème de la génération des signaux sismiques. La première méthode utilisée, de type stochastique, est très connue dans le domaine du génie parasismique. Pour cette thèse, les signaux générés par cette méthode seront utilisés dans le [chapitre 3](#) pour calibrer et valider des schémas de contrôle. Deux autres méthodes de type déterministe seront présentées ensuite. Vu le problème de contrôle formalisé dans la [section 1.3.2](#) et sachant que les secousses sismiques sont des phénomènes très aléatoires et presque impossible à anticiper et à représenter à l'avance, cette voie semble la moins réaliste. Néanmoins, du point de vue de l'automatique, il serait intéressant de savoir supposant que l'on dispose de modèles, si celles-ci peuvent être annulées (*i.e.* rejetées, en langage de l'automatique) par l'effet d'une loi de commande adaptée. Nous répondrons à cette question dans le [chapitre 3](#), à la [section 3.2.2](#). Ici nous allons proposer deux classes de fonctions paramétrées utilisées pour en construire une base : l'une représente un signal monochromatique à enveloppe gaussienne et l'autre est construite en partant de l'équation différentielle partielle (EDP) du problème de propagation d'onde. Ces deux classes ont une propriété commune, à savoir que les fonctions peuvent être représentées par des systèmes d'équations différentielles ordinaires (EDO). Si l'on forme une base de plusieurs signaux de ce type, on peut ainsi approcher au mieux un signal sismique connu par la somme de plusieurs termes définis à partir de ces fonctions de base. Dans ce cas, la dynamique totale s'écrit comme un système augmenté d'EDO. Cette propriété est très intéressante du point de vue de l'automatique parce qu'elle donne accès à l'utilisation de techniques connues (standard) d'atténuation et rejet de perturbations.

## 2.1 Structures sismiquement isolées à la base. Systèmes d'isolation mixte

**Un prérequis : passage d'un modèle complet à  $N$  DDL vers un modèle réduit à  $n$  DDL** Les structures réelles sont des systèmes à paramètres distribués, donc à dimension infinie. En revanche, il est préférable pour des raisons d'ordre pratique, [Soong, 1990](#), § 4, de travailler avec des modèles à dimension finie. En ce qui concerne les travaux de cette thèse, il nous faut des modèles simples et représentatifs qui seront utilisés pour l'élaboration des lois de commande. La thématique de réduction de modèle est très large et dépasse le cadre de ces travaux. C'est pourquoi, nous allons supposer au préalable qu'une réduction de modèle en deux étapes a été effectuée :

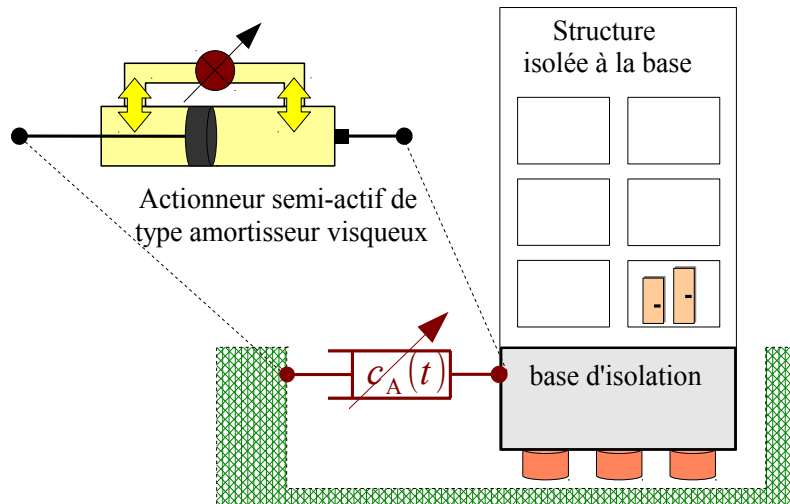
- (i) discrétisation d'un modèle continu à paramètres distribués, et élaboration d'un modèle de structure à  $N$  DDL (où le nombre  $N$  pourrait être de l'ordre de quelques centaines voir plus),
- (ii) passage du modèle discret de structure à  $N$  DDL vers un modèle encore plus simple à quelques degrés de liberté  $n$  appelé « modèle réduit », où  $n \ll N$ .

Dans un premier temps nous allons détailler les propriétés de ces modèles qui serviront plus loin au [chapitre 3](#) pour établir et paramétrer les lois de commande. Ensuite, dans les [sections 2.1.2](#) et [2.1.3](#) deux modèles simples de structures à 2 DDL isolées par différents systèmes d'isolation sismique seront présentés. Ces modèles seront utilisés au [chapitre 3](#), comme application des lois de commande proposées.

### 2.1.1 Structures non linéaires à $n$ DDL

Ce travail concerne l'étude des structures linéaires ou non linéaires, à  $n$  DDL, qui sont protégées contre les secousses sismiques par un système d'isolation mixte : passif + semi-actif, système positionné entre la base et la fondation. La partie passive est assurée par une combinaison de patins à frottement sec, ressorts et amortisseurs visqueux, tandis que la partie semi-active est constituée d'amortisseurs visqueux à coefficients d'amortissement  $c_A(t)$  variables. Les problèmes de redondance des dispositifs seront négligés pour ne considérer que l'effet global : on parlera dans ce cas d'un seul amortisseur visqueux, d'un seul patin frottant, etc.

**Actionneur semi-actif** Le concept de l'amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable a été introduit par [Karnopp et al., 1974](#), pour des suspensions automobiles. Ensuite, il a été repris par la communauté du génie parasismique et utilisé pour résoudre des problèmes de contrôle semi-actif. Physiquement, le dispositif le plus simple, [Constantinou et Symans, 1992](#), illustré dans la [figure 2.1](#), est constitué d'un tube séparé en deux chambres par un disque, relié à une tige. Le mouvement de la tige entraîne la circulation dans le double sens d'un fluide visqueux dans un circuit annexe ; le fluide traverse alors un orifice dont les dimensions peuvent être contrôlées en temps-réel par l'utilisateur. Dans une première approximation, l'ouverture et la fermeture de cet orifice traduit une variation du coefficient d'amortissement  $c_A(t)$ . Ce principe de fonctionnement et le schéma associé apparaissent dans d'autres travaux, voir par exemple, [Scruggs et Gavin, 2011](#), §30.1.1, [Pham, 2010](#), §2.3.1, [Preumont, 2002](#), §12.4.



**Figure 2.1** – Schéma d'une structure sismiquement isolée au niveau de la base par un système d'isolation mixte : passif et semi-actif, dont la partie semi-active est assurée par un amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement  $c_A(t)$  variable

Pour des raisons de sécurité, il est envisageable que ce type de dispositif soit muni de circuits secondaires qui relient les deux chambres et au cas où la pression du fluide à l'intérieur dépasse une certaine valeur, une vanne de sécurité s'ouvre, permettant le passage du fluide. Pendant tout ce temps la pression du fluide reste constante, et sachant que la force générée par le dispositif est proportionnelle à cette pression, ce phénomène est caractérisé par une force de réaction constante. Dans le cadre de

cette thèse, nous souhaitons prendre en compte cette limitation en force, lors de la synthèse de la loi de commande.

La conception et la réalisation pratique des dispositifs semi-actifs sont un peu plus sophistiquées que celles des dispositifs passifs. On se référera à titre d'exemple à l'amortisseur hydraulique de Wang et Xu, 2009, dans le domaine ferroviaire. En revanche, en génie parasismique ces dispositifs sont du ressort de la recherche théorique et expérimentale, et constituent des candidats intéressants pour l'isolation sismique.

**Modèle en coordonnées relatives** Pour simplifier la présentation, nous allons commencer par écrire les équations mécaniques du problème grâce aux coordonnées relatives. Soit  $z_r$ ,  $\dot{z}_r$ ,  $\ddot{z}_r$  les vecteurs des déplacements, vitesses et accélérations horizontales relatives, respectivement, de dimension  $n \times 1$ ; l'index  $i$  de chacun de ces vecteurs correspond au niveau (*i.e.* étage)  $i$  du modèle de la structure, où  $i = 1, \dots, n$ ;  $\ddot{x}_g$  est un scalaire et représente l'accélération horizontale du sol causée par la secousse sismique. Pour rappel, les signaux sismiques ont trois composantes dont deux horizontales, perpendiculaires entre elles, et une verticale. Dans ces travaux de thèse on s'intéresse uniquement au mouvement de la structure dans un plan vertical, et on ne garde qu'une seule composante horizontale de la secousse sismique. Mise à part notre volonté de simplifier l'étude, le choix de négliger la composante verticale des signaux sismiques est justifié par les item suivants : (i) le maximum de dommage est généré par les composantes horizontales du séisme ; (ii) les structures (par exemple, bâtiments) en général et en particulier celles construites dans le domaine du nucléaire sont conçues pour bien résister aux sollicitations verticales.

Un cadre *idéalisé* (en l'absence d'incertitudes) pour décrire la dynamique de ces systèmes est donné par les équations différentielles ordinaires couplées :

$$\boxed{M\ddot{z}_r + (C + C_c(c_A))\dot{z}_r + Kz_r + E(\dot{z}_r) = -M1_{n \times 1}\ddot{x}_g}, \quad (2.1)$$

avec :

$M, C, K$  matrices de masse, d'amortissement, et de raideur (de dimension  $n \times n$ )

$C_c(c_A)$  matrice des coefficients d'amortissements variables appartenant aux actionneurs de type semi-actif (de dimension  $n \times n$ )

$E(\dot{z}_r)$  vecteur qui modélise les forces de frottement sec entre la base et le sol (de dimension  $n \times 1$ )

Concernant la structure des matrices  $M, C, K$ , aucune hypothèse n'est faite à ce niveau de l'exposé.

La notation  $1_{n \times 1}$  représente un vecteur colonne de dimension  $n$  où tous les coefficients sont 1. Par la suite nous allons utiliser les notations  $1_n$  pour désigner la matrice identité de dimension  $n \times n$ ;  $0_{n \times 1}$  et  $0_n$  représentent, le vecteur colonne de dimension  $n$ , et les matrices carrées de dimension  $n \times n$  où tous les coefficients sont fixés à 0, respectivement.

**Coordonnées physiques : relatives et absolues** Le passage entre les coordonnées physiques relatives et absolues, en déplacement, vitesse et accélération, respectivement, est donné par les transformations :

$$z_a = z_r + 1_{n \times 1}x_g, \quad \dot{z}_a = \dot{z}_r + 1_{n \times 1}\dot{x}_g, \quad \ddot{z}_a = \ddot{z}_r + 1_{n \times 1}\ddot{x}_g, \quad (2.2)$$

où  $z_a$ ,  $\dot{z}_a$ ,  $\ddot{z}_a$  représentent les vecteurs des déplacements, vitesses et accélérations horizontales relatives, respectivement ;  $x_g$ ,  $\dot{x}_g$  sont des scalaires et représentent la position et la vitesse horizontale absolue du sol causé par la secousse sismique.

En explicitant les termes en  $C_c(c_A)$  et  $E(\dot{z}_r)$  du système (2.1) et en passant aux coordonnées absolues, il devient :

$$M \begin{pmatrix} \ddot{z}_{a1} \\ \ddot{z}_{a2} \\ \dots \\ \ddot{z}_{an} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \dot{z}_{a1} \\ \dot{z}_{a2} \\ \dots \\ \dot{z}_{an} \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} z_{a1} \\ z_{a2} \\ \dots \\ z_{an} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_A(\dot{z}_{a1} - \dot{x}_g) - c_b\dot{x}_g - k_b x_g + \\ \mu N \text{sign}(\dot{z}_{a1} - \dot{x}_g) \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.3)$$

Cette écriture fait ressortir un des avantages en faveur de l'utilisation des coordonnées absolues au lieu des coordonnées relatives, afin de résoudre des problèmes de contrôle : la loi de commande  $c_A$  et la perturbation (dans le langage de l'automatique, le signal sismique est interprété comme perturbation) apparaissent uniquement sur une seule équation, d'où la possibilité d'agir directement pour vaincre les effets négatifs engendrés dans le comportement de la structure par la perturbation. Cette observation donne la possibilité aux plusieurs approches pour traiter ce problème de contrôle. Si on dispose de moyens illimités de contrôle actif, il est donc envisageable, en théorie, de pouvoir :

- (i) dominer l'effet des perturbations, de façon globale et asymptotique comme dans les travaux de [Leitmann, 1979](#), [Corless et Leitmann, 1981](#), à l'aide de lois de commande suffisamment fortes, sinon,
- (ii) atténuer localement l'effet des perturbations si
  - l'on dispose de modèles mathématiques suffisamment proches et représentatifs de perturbations, ou
  - l'on part de l'hypothèse que les perturbations sont inconnues
- (iii) rejeter entièrement les perturbations si elles sont mesurables,

Ceci constitue un point de départ essentiel analysé dans le chapitre suivant.

Dans la pratique, le moyens de contrôle sont limités : pour notre étude centré sur le contrôle semi-actif on parlera de limitations (i) en force du dispositif semi-actif, et (ii) du coefficient d'amortissement variable  $c_A(t)$ . Une autre limitation est que les forces générées par les dispositifs semi-actifs, ne peuvent agir que dans un seul sens par rapport à la vitesse, comme on peut observer dans l'équation (2.3).

Dans l'équation (2.3) nous avons supposé que la partie passive du système d'isolation mixte est composé par : (i) un patin de frottement sec de coefficient de frottement  $\mu$  et  $F_N$  est la force normale ; (ii) un amortissement visqueux de coefficient fixe  $c_b$ , et (iii) d'une raideur  $k_b$ .

**Discussion sur les matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$**  Compte tenu de notre objectif d'améliorer les spectres de plancher, nous souhaitons proposer une méthodologie afin de pouvoir intégrer les informations sur le contenu des matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  lors de la synthèse de lois de commande. Ces matrices contiennent l'information dynamique du système décrit par les équations (2.1) et (2.3). Une première idée (ou approche) consiste à n'intégrer dans la synthèse de la loi de commande que les informations sur les matrices  $M$  et  $K$ , et ignorer dans un premier temps la matrice  $C$  : soit



parce que cette dernière n'existe pas, sinon parce que son influence est considérée négligeable. Dans un second temps, nous nous proposerons de tenir compte de  $M$  et  $K$ , mais aussi de  $C$ . Le [tableau 2.1](#) a été ainsi conçu en partant de ces besoins définis par l'automaticien.

La section présente s'attachera à traiter, dans l'ordre, les « situations » décrites dans le [tableau 2.1](#) : du cas le plus simple à la situation la plus générale, où il y a le moins d'hypothèses/restrictions sur la structure interne de ces matrices. Le but est de pouvoir arriver à une décomposition modale, point clé pour pouvoir avancer vers une solution du problème énoncé dans la [section 1.3.2](#).

Situation	Idée	Hypothèses
I	prendre en compte les caractéristiques des matrices $M$ et $K$ , et ignorer $C$ , lors de la définition d'une base modale	(i) $M$ et $K$ sont symétriques (ii) $M$ est définie positive
II	prendre en compte les caractéristiques des matrices $M$ , $C$ et $K$ lors de la définition d'une base modale	(i) $M$ et $K$ sont symétriques (ii) $M$ est définie positive (iii) $C$ est symétrique et modale
III		(i) $M$ et $K$ sont symétriques (ii) $C$ est symétrique et non modale
IV		$K$ et $C$ sont quelconques

**Tableau 2.1** – Organisation des propriétés des matrices  $M$ ,  $K$  et  $C$  selon 4 « situations », d'un cas simple à un cas général, ce avec une idée de contrôle spécifique

La terminologie de matrice d'amortissement  $C$  *modale* est reprise de [Argyris et Mlejnek, 1991](#), §9, [Inman, 2006](#), §3.5, [Soong et Constantinou, 1994](#), §I.3. Pour rappel, on parle également dans ce cas de structures avec amortissement classique, proportionnel, normal, [Preumont, 1990](#), §6.1.3, ou orthogonal; dans le cas où  $C$  est *non modale* les équations linéaires couplées du système  $M$ - $C$ - $K$  ne pourront pas être découplées en utilisant les techniques de décomposition modale.

Dans la « situation IV », l'hypothèse sur la matrice  $M$  n'est pas indiquée : du point de vue des calculs mathématiques qui seront présentés par la suite,  $M$  peut être quelconque, mais la physique des systèmes lui impose sa symétrie.

Commençons par la « situation I » identifiée dans le [tableau 2.1](#).

**Coordonnées généralisées : relatives et absolues** Pour garder le fil directeur de ce chapitre, il est nécessaire d'introduire une partie un peu plus technique. En revanche, le lecteur familier de la théorie de vibration et des notations habituelles, peut poursuivre la lecture directement à la section suivante.

**Construction d'une base modale constituée de vecteurs propres réels** Rappelons le contexte du problème aux valeurs propres généralisé, symétrique et

positif défini<sup>1</sup>, [Datta, 2010](#), §11. On part de deux hypothèses :

- (i) l'existence de deux matrices symétriques (ou hermitiennes)  $K$  et  $M$ ,
- (ii) la matrice  $M$  est supposée être définie positive.

Soit  $(\omega_i^2, \varphi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  la paire de valeurs propres et vecteurs propres de droite : pour chaque  $i$ , les  $\omega_i$  et  $\varphi_i$  vérifient

$$\omega_i^2 M \varphi_i = K \varphi_i, \quad \varphi_i' M \varphi_j = \delta_{ij}, \quad \varphi_i' K \varphi_j = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad (2.4a,b,c)$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker. Voir par exemple, [Meirovitch, 1990](#), eq. (8.105), pp. 340, [Stewart et Sun, 1990](#), Thm. 1.15, pp. 281. Sachant qu'à partir de la première relation, les vecteurs propres de droite  $\varphi_i$  sont calculés à une constante multiplicative près, celle-ci sera fixée telle que les deux dernières relations soient satisfaites. Ces deux dernières relations représentent des propriétés d'orthogonalité par rapport aux matrices  $M$  et  $K$ .  $\omega_i$  et les coefficients du vecteur  $\varphi_i$  sont réels. On suppose que les paires  $(\omega_i^2, \varphi_i)$  sont ordonnées telles que  $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ . Cette relation garantit que la paire  $(\omega_i^2, \varphi_i)$  correspond au  $i$ ème mode de vibration,  $i = 1, \dots, n$ . Les vecteurs propres de droite  $\varphi_i$  sont linéairement indépendants, [Datta, 2010](#), Thm. 11.9, et donc forment une base dans un espace de dimension  $n$ . Dans le domaine de la dynamique des structures, les vecteurs  $\varphi_i$  sont appelés déformées modales, [Inman, 2006](#), et forment la matrice des déformées modales

$$\Phi = \begin{pmatrix} \varphi_1 & \varphi_2 & \dots & \varphi_n \end{pmatrix}, \quad (2.5)$$

appelée aussi base modale.

En utilisant la définition (2.5), réécrivons la relation (2.4) sous forme matricielle :

$$K \Phi = M \Phi \Lambda, \quad \Phi' M \Phi = 1_n, \quad \Phi' K \Phi = \Lambda, \quad (2.6a,b,c)$$

où

$$\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2).$$

La décomposition modale est souvent utilisée dans l'analyse de la réponse vibratoire des structures. Le principe consiste à projeter le vecteur des coordonnées physiques sur la base modale, pour en construire les coordonnées généralisées :

$$z_r(t) = \Phi q_r(t) = \varphi_1 q_{r1}(t) + \varphi_2 q_{r2}(t) + \dots + \varphi_n q_{rn}(t), \quad \text{ou} \quad q_r(t) = \Phi^{-1} z_r(t), \quad (2.7)$$

$$z_a(t) = \Phi q_a(t) = \varphi_1 q_{a1}(t) + \varphi_2 q_{a2}(t) + \dots + \varphi_n q_{an}(t), \quad \text{ou} \quad q_a(t) = \Phi^{-1} z_a(t), \quad (2.8)$$

où  $q_r = (q_{r1} \ q_{r2} \ \dots \ q_{rn})'$  représente le vecteur des coordonnées généralisées relatives,  $q_a = (q_{a1} \ q_{a2} \ \dots \ q_{an})'$  est le vecteur des coordonnées généralisées absolues. À partir des équations (2.2), (2.7) et (2.8), on écrit le passage entre les coordonnées généralisées relatives et absolues, en déplacement, vitesse et accélération, respectivement, sous la forme :

$$\Phi q_a = \Phi q_r + 1_{n \times 1} x_g, \quad \Phi \dot{q}_a = \Phi \dot{q}_r + 1_{n \times 1} \dot{x}_g, \quad \Phi \ddot{q}_a = \Phi \ddot{q}_r + 1_{n \times 1} \ddot{x}_g. \quad (2.9)$$

Sachant que la matrice  $\Phi$  est inversible, son inverse peut être calculé à partir d'une des relations d'orthogonalité de l'équation (2.6).

1. en anglais : symmetric positive definite generalized eigenvalue problem

En résumé, il est souvent plus avantageux d'analyser la réponse d'une structure soumise aux excitations externes par l'intermédiaire des coordonnées généralisées. L'équation suivante est fondamentale pour notre étude et sera utilisée pour justifier les méthodes de contrôle proposées dans le chapitre suivant :

$$\ddot{q}_{ri} + 2\xi_{ri}\omega_i\dot{q}_{ri} + \omega_i^2 q_{ri} = g(\dot{q}_{r1}, \dots, \dot{q}_{ri-1}, \dot{q}_{ri+1}, \dots, \dot{q}_{rn}, c_A, \ddot{x}_g), \quad (2.10)$$

Cette EDO d'ordre deux nous indique que la dynamique de la variable  $q_{ri}(t)$  est sensible aux signaux d'entrée ayant un contenu spectral proche de la pulsation de coupure  $\omega_i$ . Elle est d'autant plus sensible que le taux d'amortissement  $\xi_{ri} \in (0, 1)$  soit proche de zero. D'où le lien avec le problème de contrôle indiqué dans la [section 1.3.2](#) : pénaliser les contributions individuelles de chaque variable  $q_{ri}(t)$  à l'aide d'une loi de commande astucieusement réglée aura comme conséquence une diminution locale (autour de  $\omega_i$ ) sur les spectres de plancher. Nous allons revenir sur ce sujet plus loin, dans le [chapitre 3](#). Une seconde façon d'interpréter l'équation (2.10) est celle d'un filtre de second ordre, à amortissement sous-critique, où  $g(\cdot)$  est une fonction qui prend en compte tous les signaux d'entrée, interprétés comme excitations : les autres coordonnées généralisées, la loi de commande et la perturbation. Si nous avons préféré de décrire la dynamique sous une forme compacte dans l'équation (2.10), ce qui limite une certaine visibilité sur les termes situés à droite du signe égal, il est à signaler que à l'intérieur de la fonction  $g(\cdot)$ , les termes en  $\dot{q}_{rj}$ , où  $j \neq i$ , sont dus au couplage introduit par les termes  $E(\dot{z}_r)$  et  $(C + C_c(c_A))\dot{z}_r$ . Précisons aussi que pour arriver à l'équation (2.10), nous sommes partis d'une forme régularisante du frottement qui rentre dans la construction du terme  $E(\dot{z}_r)$ .

Une autre idée à retenir pour le but du chapitre suivant est qu'il en est de même pour le cas du système écrit en coordonnées absolues (2.3), par le passage en coordonnées  $q_{ai}(t)$ , c'est pourquoi cette analyse ne sera pas traitée.

En résumé, ces equations constituent le point de départ de la modélisation de la dynamique des structures et paramètrent le problème à contrôler.

**Discussion sur la matrice d'amortissement  $C$  : la relation avec les vecteurs propres et les propriétés d'orthogonalité** Jusqu'à présent, nous avons vu que les matrices  $M$  et  $K$  conservent certaines propriétés dans la base modale  $\Phi$ .

Toujours pour des raisons de contrôle qui seront détaillées dans le [chapitre 3](#), il serait intéressant de pouvoir intégrer aussi l'information sur la matrice  $C$  dans la construction d'une base modale, tout en ayant accès à un ensemble de propriétés d'orthogonalité qui aideront à la construction d'une solution explicite du problème énoncé dans la [section 1.3.2](#). Dans le cas général, les vecteurs propres d'un système mécanique amorti à  $n$  DDL de type masse-amortissement-ressort sont : (i) différents de ceux correspondant au système sans amortissement, et (ii) *a priori* complexes, *i.e.*  $\in \mathbb{C}^n$ . Afin de passer de la « situation I » et introduire les autres indiquées dans le [tableau 2.1](#), précisons que certains cas particuliers concernant la forme de  $C$ , souvent analysés dans la littérature dédiée à l'étude de la dynamique des structures, méritent une attention particulière :

- (i) la matrice  $C$  est *modale* : ce qui correspond à la « situation II » identifiée dans le [tableau 2.1](#). En particulier, des modèles d'amortissement de type Rayleigh et Caughey consistent à exprimer la matrice  $C$  en fonction de  $M$  et  $K$ , tel que à partir des propriétés d'orthogonalité rappelées dans les [équations \(2.4\)](#)

et (2.6) on pourra en déduire les relations similaires d'orthogonalité qui feront apparaître la matrice  $C$  et vecteurs propres déjà calculés  $\varphi_i$ . Voir plus de détails dans Soong et Constantinou, 1994, §I.3. Dans ce cas, dans la relation (2.10) les termes en  $\dot{q}_{rj}$ , où  $j \neq i$ , situés à droite du signe égal seront dus uniquement au couplage introduit par les termes  $E(\dot{z}_r)$  et  $C_c(c_A)\dot{z}_r$  et non au terme  $C\dot{z}_r$ .

- (ii) la matrice  $C$  est *non modale* : dans ce cas, il faut calculer les vecteurs propres complexes  $\varphi_{ci}$  et chercher des nouvelles relations d'orthogonalité en termes de  $\varphi_{ci}$ . Cette situation sera poursuivie par la suite.

Dans les lignes qui suivent, nous étudions la « situation III » identifiée dans le tableau 2.1.

**Coordonnées modales complexes** Ci-après on s'intéresse au cas où la matrice  $C$  est non modale et l'on cherche : (i) une décomposition du type des équations (2.7) et (2.8) qui consiste à projeter les coordonnées physiques sur une autre base de vecteurs propres associés aux matrices  $M$ ,  $K$  et  $C$ , ainsi que (ii) des relations d'orthogonalité.

**Construction d'une base modale constituée de vecteurs propres complexes** Pour pouvoir tenir compte simultanément des trois matrices  $M$ ,  $C$  et  $K$  dans la construction des vecteurs propres complexes  $\varphi_{ci}$ , il faut résoudre le problème aux valeurs propres quadratique<sup>2</sup>, Datta, 2010, §11.9,

$$(\lambda_i^2 M + \lambda_i C + K) \varphi_{ci} = 0_{n \times 1}, \quad (2.11)$$

où  $(\lambda_i, \varphi_{ci})$  sont les paires de valeurs propres et vecteurs propres de droite,  $i = 1, \dots, n$ . Leurs complexes-conjugués  $(\bar{\lambda}_i, \bar{\varphi}_{ci})$  vérifient aussi l'équation (2.11) ce qui fait un total de  $2n$  valeurs propres et vecteurs propres. Une première tentative de décomposer le vecteur des coordonnées physiques sur la base constituée par les  $\varphi_{ci}$  et  $\bar{\varphi}_{ci}$ ,

$$z_r(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_{ci} q_{cri}(t) + \bar{\varphi}_{ci} \bar{q}_{cri}(t), \quad (2.12)$$

$$z_a(t) = \sum_{i=1}^n \varphi_{ci} q_{cai}(t) + \bar{\varphi}_{ci} \bar{q}_{cai}(t). \quad (2.13)$$

nous fait découvrir qu'il est impossible d'en construire une transformation entre les deux espaces (celui des coordonnées physiques d'un côté et des coordonnées modales de l'autre) : dans ces équations nous avons à gauche du signe égal un vecteur à  $n$  composantes, tandis que à droite nous avons un vecteur à  $2n$  coordonnées modales complexes-conjugués données par (2.12) et (2.13), respectivement. Dans la décomposition (2.12) il faut considérer simultanément  $(q_{cri}(t), \varphi_{ci})$  et  $(\bar{q}_{cri}(t), \bar{\varphi}_{ci})$  dans le passage du vecteur des coordonnées physiques  $z_r(t)$  vers le vecteur des coordonnées modales (2.12), parce que le vecteur des coordonnées physiques est réel (voir Meirovitch, 1990, pp. 258). L'équation (2.13) est traitée de façon analogue. En revanche, la solution proposée dans Argyris et Mlejnek, 1991, pp. 329, Datta, 2010, §11.9.3, pour pouvoir construire une transformation valide sera reprise par

2. en anglais : quadratic eigenvalue problem

la suite. Soit

$$v_i = \begin{pmatrix} \varphi_{ci} \\ \lambda_i \varphi_{ci} \end{pmatrix}, \quad (2.14)$$

et les matrices symétriques :

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} C & M \\ M & 0_n \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -K & 0_n \\ 0_n & M \end{pmatrix}.$$

Insistons sur le fait que la matrice  $\mathcal{B}$  n'est pas nécessairement définie positive.

Le problème (2.11) est alors transformé vers un problème aux valeurs propres généralisé et symétrique<sup>3</sup>, Datta, 2010, §11, qui part d'une seule hypothèse : soit  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  deux matrices symétriques. Alors

$$\lambda_i \mathcal{B} v_i = \mathcal{A} v_i, \quad v_i' \mathcal{B} v_j = \delta_{ij}, \quad v_i' \mathcal{A} v_j = \lambda_i \delta_{ij}, \quad (2.15a,b,c)$$

$$\lambda_i w_i' \mathcal{B} = w_i' \mathcal{A}, \quad w_i' \mathcal{B} v_j = \delta_{ij}, \quad w_i' \mathcal{A} v_j = \lambda_i \delta_{ij}, \quad (2.15d,e,f)$$

où les deux dernières relations dans (2.15a,b,c) correspondent aux propriétés d'orthogonalité entre les vecteurs propres de droite  $v_i$ , tandis que les deux dernières relations dans (2.15d,e,f) correspondent aux propriétés d'orthogonalité entre les vecteurs propres de droite  $v_i$  et ceux de gauche  $w_i$ ; les  $\lambda_i$  sont les mêmes dans (2.11) et (2.15).

On suppose que les paires  $(\lambda_i, v_i)$  sont ordonnées telles que

$$|\operatorname{Im}(\lambda_1)| \leq |\operatorname{Im}(\lambda_2)| \leq \dots \leq |\operatorname{Im}(\lambda_n)|. \quad (2.16)$$

Cette relation assure que la paire  $(\lambda_i, v_i)$  et donc  $(\lambda_i, \varphi_{ci})$  correspondent au  $i$ ème mode de vibration,  $i = 1, \dots, n$ .

Maintenant nous pouvons définir les transformations suivantes entre coordonnées physiques et coordonnées modales complexes :

$$\begin{pmatrix} z_r \\ \dot{z}_r \end{pmatrix} = \mathcal{V} q_{cr}(t) = \sum_{i=1}^n v_i q_{cri}(t) + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \overline{q_{cri}}(t), \quad \text{ou} \quad q_{cr}(t) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} z_r \\ \dot{z}_r \end{pmatrix}, \quad (2.17)$$

$$\begin{pmatrix} z_a \\ \dot{z}_a \end{pmatrix} = \mathcal{V} q_{ca}(t) = \sum_{i=1}^n v_i q_{cai}(t) + \sum_{i=1}^n \bar{v}_i \overline{q_{cai}}(t), \quad \text{ou} \quad q_{ca}(t) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} z_a \\ \dot{z}_a \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

où la matrice de changement de base s'écrit :

$$\mathcal{V} = \begin{pmatrix} v_1 & \dots & v_n & \bar{v}_1 & \dots & \bar{v}_n \end{pmatrix} \quad (2.19)$$

et les nouvelles coordonnées modales complexes relatives sont définies par :

$$q_{cr}(t)' = \begin{pmatrix} q_{cr1}(t) & \dots & q_{crn}(t) & \overline{q_{cr1}}(t) & \dots & \overline{q_{crn}}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

tandis que les coordonnées modales complexes absolues sont définies par :

$$q_{ca}(t)' = \begin{pmatrix} q_{ca1}(t) & \dots & q_{can}(t) & \overline{q_{ca1}}(t) & \dots & \overline{q_{can}}(t) \end{pmatrix}. \quad (2.21)$$

---

3. en anglais : symmetric generalized eigenvalue problem

Les relations (2.15) peuvent être exprimées sous forme matricielle :

$$\mathcal{B}\mathcal{V}\Xi = \mathcal{A}\mathcal{V}, \quad \mathcal{V}'\mathcal{B}\mathcal{V} = 1_{2n}, \quad \mathcal{V}'\mathcal{A}\mathcal{V} = \Xi, \quad (2.22a,b,c)$$

$$\Xi\mathcal{W}'\mathcal{B} = \mathcal{W}'\mathcal{A}, \quad \mathcal{W}'\mathcal{B}\mathcal{V} = 1_{2n}, \quad \mathcal{W}'\mathcal{A}\mathcal{V} = \Xi, \quad (2.22d,e,f)$$

où

$$\mathcal{W} = \begin{pmatrix} w_1 & w_2 & \cdots & w_n & \overline{w_1} & \overline{w_2} & \cdots & \overline{w_n} \end{pmatrix},$$

$$\Xi = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \overline{\lambda_1}, \overline{\lambda_2}, \dots, \overline{\lambda_n}).$$

Soulignons que le symbole ' dans (2.15) et (2.22) représente le transposé et *non pas* le transposé et conjugué, des divers matrices complexes qui y apparaissent.

À partir des équations (2.2), (2.17) et (2.18), on voit le passage entre les coordonnées modales complexes relatives et absolues, respectivement :

$$\mathcal{V}q_{ca} = \mathcal{V}q_{cr} + \begin{pmatrix} 1_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{n \times 1} & 1_{n \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \end{pmatrix}, \quad \mathcal{V}\dot{q}_{ca} = \mathcal{V}\dot{q}_{cr} + \begin{pmatrix} 1_{n \times 1} & 0_{n \times 1} \\ 0_{n \times 1} & 1_{n \times 1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{x}_g \\ \ddot{x}_g \end{pmatrix}, \quad (2.23)$$

sachant que la matrice  $\mathcal{V}$  est inversible et son inverse peut être calculé à partir d'une des relations d'orthogonalité (2.22).

L'analyse effectuée sur la relation (2.10) n'est plus valable dans cette « situation III ». La dynamique couplée de chaque coordonnée modale complexe relative s'écrit sous forme d'EDO du premier ordre :

$$\boxed{\dot{q}_{cri} = \lambda_i q_{cri} + h(\dot{q}_{cr1}, \dots, \dot{q}_{cri-1}, \dot{q}_{cri+1}, \dots, \dot{q}_{crn}, c_A, \ddot{x}_g)}, \quad (2.24)$$

où  $h(\cdot)$  est une fonction qui dépend de plusieurs variables. Ce qui peut surprendre à la première vue est que par cette équation on ne voit plus l'augmentation en sensibilité de la dynamique de chaque variable  $q_{cri}(t)$  autour de la fréquence propre de la structure isolée, à cause de ce filtre de premier ordre (au lieu d'avoir un ordre supérieur). Mais, la séparation de  $q_{cri}(t)$ ,  $\lambda_i$  et  $h(\cdot)$  en partie réelle et partie imaginaire fait que la relation (2.24) peut se réécrire comme un système de deux équations du premier ordre couplées réelles entre les variables  $\Re(q_{cri}(t))$  et  $\Im(q_{cri}(t))$ . Puis, à partir de l'une de ces équations si on remplace l'une de ces deux variables dans l'autre équation, on retrouve une EDO de second ordre stable et amortie ayant la pulsation de coupure  $|\lambda_i|$ . D'où la conclusion que  $\Re(q_{cri}(t))$  et  $\Im(q_{cri}(t))$  ont effectivement une sensibilité prononcée autour de la pulsation  $|\lambda_i|$  par rapport au spectre entier. Cette remarque nous permettra dans le chapitre 3 de proposer une méthode de synthèse de lois de commande ayant comme objectif de réduire les variables  $q_{cri}(t)$ , ce qui entraînera en boucle fermée une réduction des spectres de plancher autour de  $|\lambda_i|$ . Par analogie, toute cette analyse s'applique aussi pour les coordonnées complexes absolues  $q_{cai}(t)$ .

**Le cas le plus général** Nous nous intéressons maintenant à la situation où les matrices  $C$  et  $K$  sont dissymétriques. Dans ce cas, il est toujours possible d'appliquer la méthodologie présentée dans le paragraphe antérieur : on garde les transformations données par les équations (2.12) et (2.13) où les  $\varphi_{ci}$  seront extraits à partir des vecteurs  $v_i$  définis dans (2.14). Les matrices  $\mathcal{A}$  et  $\mathcal{B}$  n'étant plus symétriques, on perd les propriétés d'orthogonalité entre les vecteurs propres

de droite  $v_i$ , mais on garde les propriétés d'orthogonalité entre les vecteurs propres de droite  $v_i$  et de gauche  $w_i$ . Alors, en résolvant le problème aux valeurs propres généralisé, on retrouve, [Meirovitch, 1990](#), §6.15,

$$\lambda_i \mathcal{B} v_i = \mathcal{A} v_i, \quad (2.25a)$$

$$\lambda_i w_i' \mathcal{B} = w_i' \mathcal{A}, \quad w_i' \mathcal{B} v_j = \delta_{ij}, \quad w_i' \mathcal{A} v_j = \lambda_i \delta_{ij}, \quad (2.25d,e,f)$$

où  $i, j = 1, \dots, n$ . Les relations matricielles suivent :

$$\mathcal{B} \mathcal{V} \Xi = \mathcal{A} \mathcal{V}, \quad (2.26a)$$

$$\Xi \mathcal{W}' \mathcal{B} = \mathcal{W}' \mathcal{A}, \quad \mathcal{W}' \mathcal{B} \mathcal{V} = 1_{2n}, \quad \mathcal{W}' \mathcal{A} \mathcal{V} = \Xi, \quad (2.26d,e,f)$$

En particulier, les relations (2.26)(e,f) entre  $\mathcal{W}$  et  $\mathcal{V}$  sont valides à condition que les colonnes de  $\mathcal{V}$  constituent un ensemble complet de vecteurs propres de droite indépendants – voir [Moler et van Loan, 2003](#), Méthode 14.

Citons par ailleurs, un exemple d'application de cette théorie : les machines tournantes, [Politopoulos, 2005](#), situation où les matrices  $C$  et  $K$  peuvent être dissymétriques.

**Représentation dans l'espace des variables d'état** Ayant à l'esprit qu'un cadre *réaliste* devrait tenir compte des incertitudes, une généralisation du système (2.1) sera utilisée tout le long de ce mémoire de thèse : la représentation dans l'espace des variables d'état décrite ci-dessous :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A(t)) x + f(x, \nu) + (B(x) + \Delta B(t, x, \nu)) c_A(t) + D \nu(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (2.27)$$

avec :

$A, \Delta A(t)$	matrice de transition dynamique (modèle structure isolée plus les dispositifs passifs de type amortisseur-raideur), et sa matrice des incertitudes associées (de dimension $2n \times 2n$ )
$B(x), \Delta B(t, x, \nu)$	matrice qui contient une partie de la dynamique des actionneurs semi-actifs et sa matrice des incertitudes associées (de dimension $2n \times m$ )
$f(x, \nu)$	vecteur des efforts produits par les dispositifs passifs de type patin de frottement sec mis entre la base et le sol (de dimension $2n \times 1$ )
$D$	matrice qui spécifie les positions des perturbations introduites sur la structure isolée

Par exemple, si on revient au modèle de la structure en coordonnées relatives (2.1), le passage vers le système (2.27) est fait en introduisant le vecteur des variables d'état

$$x = \begin{pmatrix} z_r \\ \dot{z}_r \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2n \times 1},$$

la loi de commande  $c_A(t)$  et la perturbation  $\nu = \ddot{x}_g$ . Pareillement, le modèle de la structure en coordonnées absolues (2.3) peut être mis sous la forme du système (2.27). Nous allons illustrer par la suite que le système (2.27) est suffisamment général pour permettre également la représentation de la dynamique des structures sismiquement isolées au niveau de la base dans les coordonnées généralisées et modales.



Paramètre	Valeur
$m_s$	1
$\gamma_m$	0.8
$m_b$	$m_s(1 - \gamma_m)/\gamma_m$
$\xi_s$	0.05
$\nu_s$	3
$\omega_s$	$2\pi\nu_s$
$k_s$	$\omega_s^2 m_s$
$c_s$	$2\xi_s\omega_s m_s$
$\xi_b$	0.05
$\nu_b$	0.5
$\omega_b$	$2\pi\nu_b$
$k_b$	$\omega_b^2 (m_b + m_s)$
$c_b$	$2\xi_b\omega_b (m_b + m_s)$
$\mu$	0.007483
$g$	9.81
$F_N$	$(m_b + m_s)g$
$v_{fr}$	0.20
$\sigma(y)$	$\tanh(11 \times y)$
$\Delta\xi_b$	0.20
$c_A^{\min}$	0
$c_A^{\max}$	$2\Delta\xi_b\omega_b (m_b + m_s)$
$\zeta$	0.02

**Tableau 2.2** – Modèle de calcul numérique pour les structures à 2 DDL étudiées. Paramètres du spectre de plancher. Les unités de mesure sont cohérentes<sup>4</sup> entre elles.

Pour résumer notre démarche future et ainsi guider le lecteur, dans le chapitre suivant nous allons chercher dans un premier temps des lois de commande  $c_A(t)$  adaptées aux systèmes générales de type (2.27); ces dernières seront validées en simulation sur deux modèles simples de structures isolées à 2 DDL. Présentons-les par la suite.

## Structures à 2 DDL

**Ajout de l'isolation sismique.** Les systèmes d'isolation mixte étudiés dans cette thèse consistent à poser le modèle réduit illustré dans le chapitre dédié à l'état de l'art (voir la figure 1.10(c)), sur des appuis passifs et d'ajouter un amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable entre la base de la structure et le sol, pour en construire un modèle à 2 DDL. Ils seront présentés dans ce qui suit.

### 2.1.2 1<sup>er</sup> modèle à 2 DDL

4. en anglais : consistent units

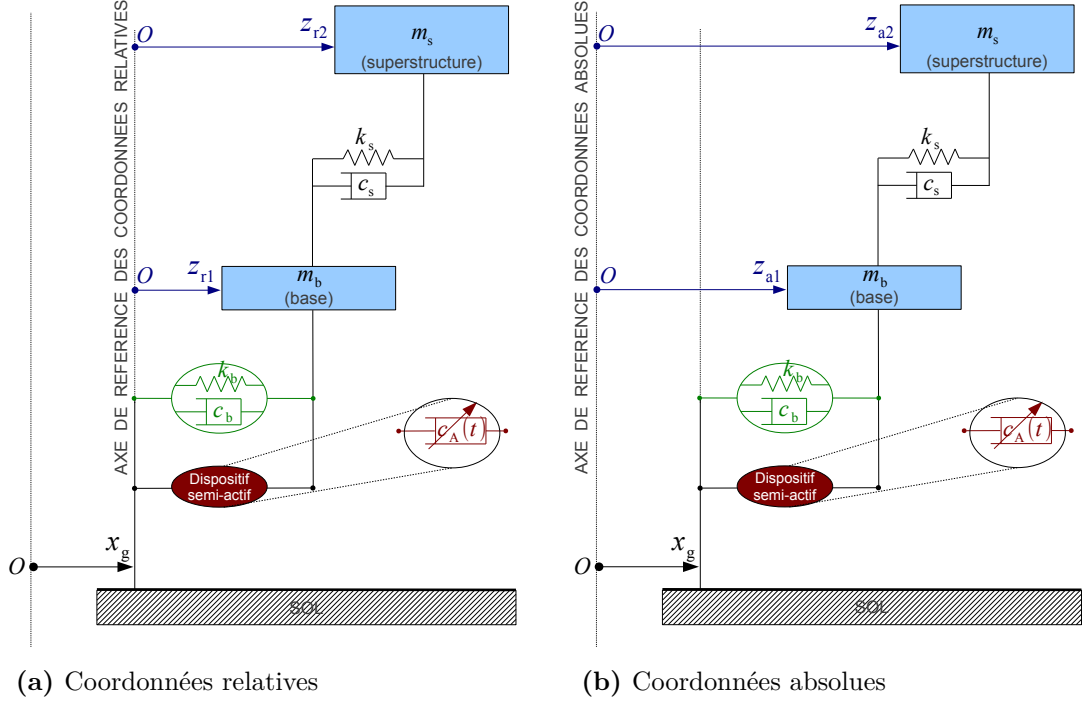


Coordonnées physiques		Coordonnées généralisées	
relatives	absolues	relatives	absolues
$x = \begin{pmatrix} z_r \\ \dot{z}_r \end{pmatrix}, \quad \nu = \ddot{x}_g,$ $A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1}, \quad f \equiv 0_{4 \times 1},$ $B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}T \dot{z}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\dot{z}_{r1}/m_b \\ 0 \end{pmatrix},$ $\Delta B \equiv 0_{4 \times 1}, \quad D = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$	$x = \begin{pmatrix} z_a \\ \dot{z}_a \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \end{pmatrix},$ $A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1}, \quad f \equiv 0_{4 \times 1},$ $B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}T \dot{z}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\dot{z}_{a1}/m_b \\ 0 \end{pmatrix},$ $\Delta B(\nu) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ M^{-1}T 1_{2 \times 1} \dot{x}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ \dot{x}_g/m_b \\ 0 \end{pmatrix},$ $D = \begin{pmatrix} 0_2 \\ M^{-1}K 1_{2 \times 1} \quad M^{-1}C 1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$	$x = \begin{pmatrix} q_r \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}, \quad \nu = \ddot{x}_g,$ $A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -\Lambda & -\Phi' C \Phi \end{pmatrix},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1}, \quad f \equiv 0_{4 \times 1},$ $B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\Phi' T \Phi \dot{q}_r \end{pmatrix},$ $\Delta B \equiv 0_{4 \times 1},$ $D = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\Phi' M 1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$	$x = \begin{pmatrix} q_a \\ \dot{q}_a \end{pmatrix}, \quad \nu = \begin{pmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \end{pmatrix},$ $A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -\Lambda & -\Phi' C \Phi \end{pmatrix},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1}, \quad f \equiv 0_{4 \times 1},$ $B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\Phi' T \Phi \dot{q}_a \end{pmatrix},$ $\Delta B(\nu) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ \Phi' T 1_{2 \times 1} \dot{x}_g \end{pmatrix},$ $D = \begin{pmatrix} 0_2 \\ \Phi' K 1_{2 \times 1} \quad \Phi' C 1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$
Voir la <a href="#">figure 2.2a</a> et les relations de définition (2.28). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » I-IV du <a href="#">tableau 2.1</a> .	Voir la <a href="#">figure 2.2b</a> et les relations de définition (2.28). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » I-IV du <a href="#">tableau 2.1</a> .	Voir les relations de définition (2.28) et (2.5), et la transformation (2.7). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » I-II du <a href="#">tableau 2.1</a> .	Voir les relations de définition (2.28) et (2.5), et la transformation (2.8). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » I-II du <a href="#">tableau 2.1</a> .

**Tableau 2.3** – [Partie I.] Description de la dynamique de la structure isolée à 2 DDL (avec amortissement) illustrée dans la [figure 2.2](#), mise sous la forme du système (2.27) et ses coordonnées

Coordonnées modales complexes	
relatives	absolues
$x = q_{\text{cr}}, \quad \nu = \ddot{x}_{\text{g}},$ $A = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \mathcal{V},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1}, \quad f \equiv 0_{4 \times 1},$ $B(x) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}T \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \end{pmatrix} \mathcal{V} q_{\text{cr}} \end{pmatrix},$ $\Delta B \equiv 0_{4 \times 1}, \quad D = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$	$x = q_{\text{ca}}, \quad \nu = \begin{pmatrix} x_{\text{g}} \\ \dot{x}_{\text{g}} \end{pmatrix},$ $A = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \mathcal{V},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1}, \quad f \equiv 0_{4 \times 1},$ $B(x) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}T \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \end{pmatrix} \mathcal{V} q_{\text{ca}} \end{pmatrix},$ $\Delta B(\nu) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ M^{-1}T \, 1_{2 \times 1} \dot{x}_{\text{g}} \end{pmatrix}, \quad D =$ $\mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_2 \\ M^{-1}K \, 1_{2 \times 1} \quad M^{-1}C \, 1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$
Voir les relations de définition (2.28) et (2.19), et la transformation (2.17). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » III-IV du <a href="#">tableau 2.1</a> .	Voir les relations de définition (2.28) et (2.19), et la transformation (2.18). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » III-IV du <a href="#">tableau 2.1</a> .

**Tableau 2.4** – [Partie II.] Description de la dynamique de la structure isolée à 2 DDL (avec amortissement) illustrée dans la [figure 2.2](#), mise sous la forme du système (2.27) et ses coordonnées



**Figure 2.2** – Schéma d’une structure à 2 DDL en mouvement horizontal et de ses coordonnées. La structure est sismiquement isolée à l’aide d’un système d’isolation mixte : passif (raideur et amortisseur visqueux fixe) et semi-actif (amortisseur visqueux à coefficient d’amortissement variable)

La particularité de ce premier modèle que nous allons présenter ici est constituée par son isolation sismique qui est composée d’une raideur fixe, un amortissement visqueux fixe et un amortissement visqueux variable.  $n = 2$  et les matrices qui interviennent dans le système (2.1) sont :

$$\begin{aligned}
 M &= \begin{pmatrix} m_b & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_b + k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{pmatrix}, \\
 C &= \begin{pmatrix} c_b + c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{pmatrix}, \quad C_c(c_A) = \begin{pmatrix} c_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E \equiv 0_{2 \times 1},
 \end{aligned} \tag{2.28}$$

où tous les coefficients sont des nombres réels positifs. Pour simplifier l’exposé on renvoie le lecteur à la [figure 2.2](#) pour visualiser leur place dans la géométrie du modèle. Au niveau du système d’isolation sismique *mixte*, nous avons illustré : (i) les deux éléments responsables de la partie passive (à savoir une raideur  $k_b$  et un amortisseur  $c_b$ ) qui ont été regroupés et mis à l’intérieur d’un cercle vert, et (ii) l’amortisseur visqueux à coefficient variable qui joue le rôle de la partie semi-active. La seule distinction entre les [figures 2.2a](#) et [2.2b](#) est constituée par le système de coordonnées représentées. En effet, leur contenu est redondant mais nous avons préféré de procéder à cette séparation pour faciliter la lecture des colonnes du [tableau 2.3](#). Pour ce modèle, les matrices  $M$ ,  $C$ ,  $K$  sont symétriques et définies positives.

Mis sous la forme de l’équation (2.27), plusieurs façons de décrire la dynamique de ce modèle sont illustrées dans les [tableaux 2.3](#) et [2.4](#). Présentons-les par la suite, groupés en colonnes deux par deux :

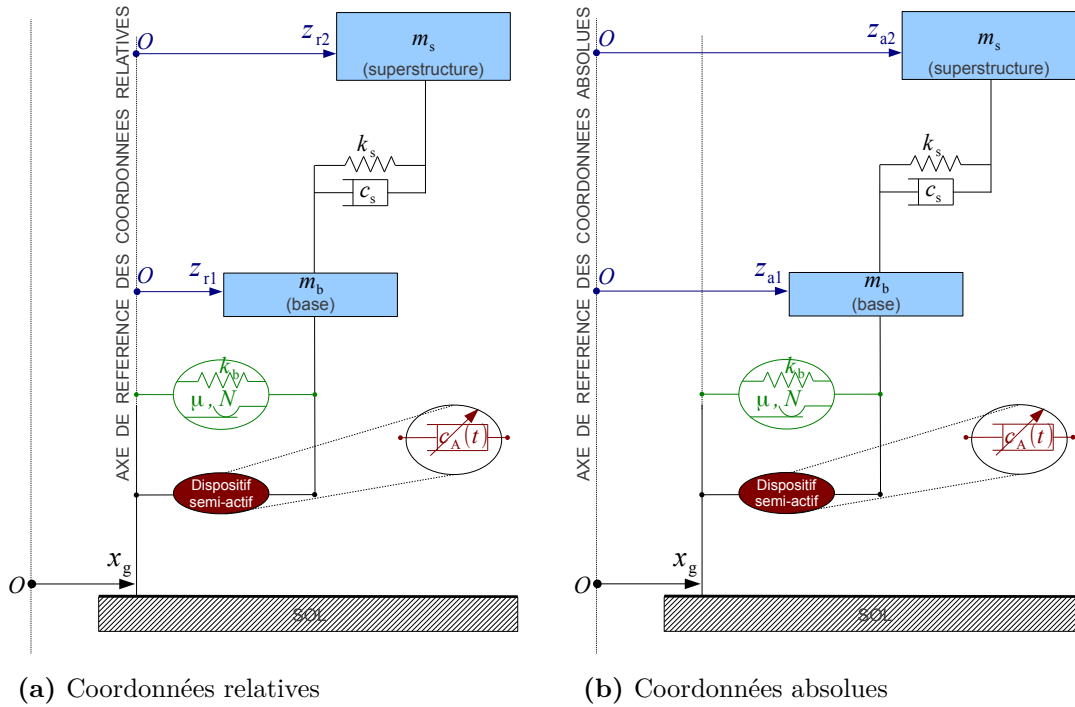
- coordonnées physiques : on multiplie à gauche le système (2.1) par l’inverse de la matrice  $M$  et ensuite on le réécrit sous forme d’un système contrôlé d’EDO

du premier ordre ;

- coordonnées généralisées : on remplace les coordonnées physiques par les transformations (2.7) et (2.8), respectivement, ensuite on multiplie le tout par  $\Phi'$ , on applique les relations d'orthogonalité (2.6) et enfin on met le système sous la forme d'un système contrôlé d'EDO du premier ordre ;
- coordonnées modales complexes : à partir des relations données par les deux premières colonnes du tableau 2.3, il est possible de réécrire la dynamique de la structure en coordonnées modales complexes par simple remplacement des transformations données par les équations (2.17) et (2.18). À la fin on retrouve la représentation par variables d'état (2.27), où les matrices sont présentées dans le tableau 2.4.

Pour plus de détails sur la construction du modèle, voir Pham, 2010, §3.1.

### 2.1.3 2<sup>e</sup> modèle à 2 DDL



**Figure 2.3** – Schéma d'une structure à 2 DDL en mouvement horizontal et de ses coordonnées. La structure est sismiquement isolée à l'aide d'un système d'isolation mixte : passif (raideur et patin à frottement sec) et semi-actif (amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable)

La particularité de ce modèle est que l'isolation sismique est constituée d'une raideur fixe, un patin à frottement sec de coefficient fixe et un amortissement visqueux variable.  $n = 2$  et les matrices qui interviennent dans le modèle (2.1) sont :

$$M = \begin{pmatrix} m_b & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_b + k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{pmatrix}, \quad (2.29)$$

$$C_c(c_A) = \begin{pmatrix} c_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E(\dot{z}_r) = \begin{pmatrix} \mu F_N \text{sign}(\dot{z}_{r1}) \\ 0 \end{pmatrix},$$

où tous les coefficients sont des nombres réels positifs. Comme précédemment, pour simplifier l'exposé nous renvoyons le lecteur à la figure 2.3 pour visualiser le

place de chaque composante de la structure dans la géométrie du modèle. Dans la [figure 2.3a](#), les coordonnées relatives ont été mises en évidence, tandis que dans la [figure 2.3b](#), ce sont les coordonnées absolues. Mis sous la forme (2.27), plusieurs façons de décrire la dynamique de ce modèle sont illustrées dans les [tableaux 2.6](#) et [2.7](#). Pour ce modèle aussi, les matrices  $M$ ,  $C$ ,  $K$  sont symétriques et  $K$  est définie positive.

Pour éviter les difficultés mathématiques introduites par le travail avec les fonctions discontinues (par exemple, perte d'unicité des solutions, calculs numériques inexacts), souvent il est préférable d'utiliser des fonctions régularisantes continues et lissées. Une seconde raison nous incite à aller dans cette direction : les résultats expérimentaux indiqués dans plusieurs ouvrages dont [Wolf et Constantinou, 2004](#), montrent une évolution continue de la force de frottement. Par exemple, ceci est dû aux phénomènes physiques de contact entre polytétrafluoroéthylène et acier, [Pham, 2010](#), §3.1.1.3.

La courbe bleue dans la [figure 2.4](#) représente le modèle de la force de frottement utilisée dans [Oden et Tend, 1985](#) :

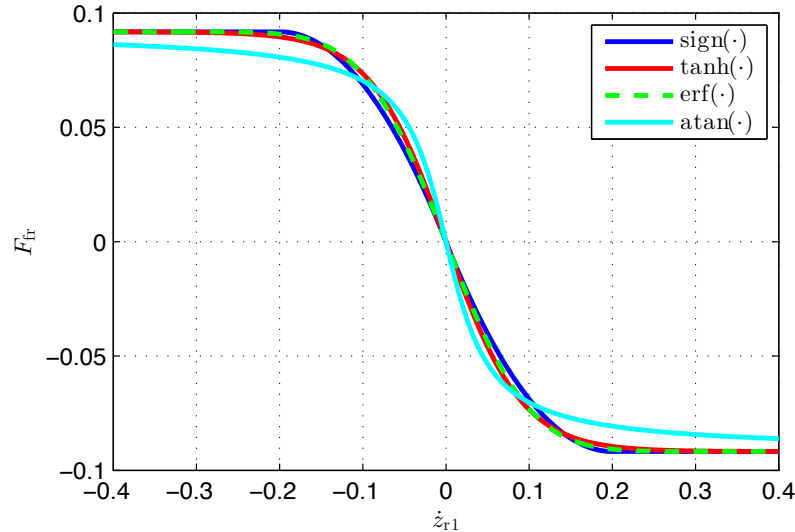
$$F_{\text{fr}}(\dot{z}_{r1}) = \begin{cases} -\mu F_N \left(2 - \frac{|\dot{z}_{r1}|}{v_{\text{fr}}}\right) \frac{\dot{z}_{r1}}{v_{\text{fr}}}, & \text{if } |\dot{z}_{r1}| < v_{\text{fr}}, \\ -\mu F_N \text{sign}(\dot{z}_{r1}), & \text{sinon,} \end{cases} \quad (2.30)$$

et s'applique aux : (i) dispositifs constitués d'appuis à plaques de frottement combinés avec appuis élastomère, et (ii) pendules de frottement.

Essayons de trouver un modèle mathématique encore plus simple qui s'écrit sur une ligne, de type

$$F_{\text{fr}}(\dot{z}_{r1}) \approx -\mu F_N \sigma(\dot{z}_{r1}).$$

Parmi les trois fonctions régularisantes candidates pour  $\sigma(\cdot)$ , la fonction tangente hyperbolique contractée  $\tanh(11 \times \dot{z}_{r1}) = \sigma(\dot{z}_{r1})$  sera retenue par la suite de ces travaux, voir la courbe rouge dans la [figure 2.4](#).



**Figure 2.4** – Modèles de la force de frottement

Les valeurs du coefficient de frottement de Coulomb  $\mu$  et de la force normale  $F_N$ , utilisés pour tracer les courbes de la [figure 2.4](#) se trouvent dans le [tableau 2.2](#). En particulier, pour la courbe bleue, la vitesse maximale de glissement à partir de laquelle la force de frottement reste constante  $v_{\text{fr}} = 0.2$ . Pour les deux dernières

courbes,  $\sigma(\dot{z}_{r1})$  est considéré comme étant la fonction erreur  $\text{erf}(9 \times \dot{z}_{r1})$  et la fonction arc tangente  $\text{atan}(26 \times \dot{z}_{r1})$ , respectivement.

Afin de pouvoir comparer le comportement des deux systèmes d'isolation présentés dans les sections 2.1.3 et 2.1.3, nous avons choisi la même valeur de  $k_b$  tandis que  $\mu$  est choisi tel que, après avoir simulé le comportement des deux structures en utilisant une base de données sismiques, les moyennes des déplacements relatifs maximaux au niveau de la base soient les plus proches possibles. En d'autres termes, nous allons partir d'une valeur fixe de  $\xi_b$  et chercher le  $\mu$  qui lui correspond, à partir d'un algorithme d'optimisation numérique. Pour plus de détails sur cette procédure, voir Pham, 2010, §3.1.1.3.

Partons des valeurs des paramètres définis dans le tableau 2.2, sauf pour  $\xi_b$  et  $\mu$ , et d'une base de données constituée par 100 accélérogrammes sismiques artificielles générés par la procédure indiquée dans la section 2.3.1, qui correspondent aux tremblements de terre de forte intensité. Le tableau 2.5 contient les valeurs correspondantes de  $\mu$  pour divers valeurs de  $\xi_b$ .

$\xi_b$	$\mu$
0.05	0.007483
0.08	0.011152
0.20	0.024777
0.22	0.027021
0.25	0.030273

**Tableau 2.5** – Correspondance entre  $\xi_b$  et  $\mu$

Coordonnées physiques		Coordonnées généralisées	
relatives	absolues	relatives	absolues
$x = \begin{pmatrix} z_r \\ \dot{z}_r \end{pmatrix}, \nu = \ddot{x}_g,$ $A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1},$ $f(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}E(x) \end{pmatrix},$ $E(x) = \begin{pmatrix} \mu F_N \text{sign}(\dot{z}_{r1}) \\ 0 \end{pmatrix},$ $B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}T \dot{z}_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\dot{z}_{r1}/m_b \\ 0 \end{pmatrix},$ $\Delta B \equiv 0_{4 \times 1}, D = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$	$x = \begin{pmatrix} z_a \\ \dot{z}_a \end{pmatrix}, \nu = \begin{pmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \end{pmatrix},$ $A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1},$ $f(x, \nu) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}E(x, \nu) \end{pmatrix},$ $E(x, \nu) = \begin{pmatrix} \mu F_N \text{sign}(\dot{z}_{a1} - \dot{x}_g) \\ 0 \end{pmatrix},$ $B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}T \dot{z}_a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\dot{z}_{a1}/m_b \\ 0 \end{pmatrix},$ $\Delta B(\nu) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ M^{-1}T 1_{2 \times 1} \dot{x}_g \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ \dot{x}_g/m_b \\ 0 \end{pmatrix},$ $D = \begin{pmatrix} 0_2 \\ M^{-1}K 1_{2 \times 1} & M^{-1}C 1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$	$x = \begin{pmatrix} q_r \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}, \nu = \ddot{x}_g,$ $A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -\Lambda & -\Phi' C \Phi \end{pmatrix},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1},$ $f(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\Phi' E(x) \end{pmatrix},$ $E(x) = \begin{pmatrix} \mu F_N \text{sign}(T \Phi \dot{q}_r) \\ 0 \end{pmatrix},$ $B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\Phi' T \Phi \dot{q}_r \end{pmatrix},$ $\Delta B \equiv 0_{4 \times 1},$ $D = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\Phi' M 1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$	$x = \begin{pmatrix} q_a \\ \dot{q}_a \end{pmatrix}, \nu = \begin{pmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \end{pmatrix},$ $A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -\Lambda & -\Phi' C \Phi \end{pmatrix},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1},$ $f(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\Phi' E(x, \nu) \end{pmatrix},$ $E(x, \nu) = \begin{pmatrix} \mu F_N \text{sign}(T \Phi \dot{q}_a - \dot{x}_g) \\ 0 \end{pmatrix},$ $B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\Phi' T \Phi \dot{q}_a \end{pmatrix},$ $\Delta B(\nu) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ \Phi' T 1_{2 \times 1} \dot{x}_g \end{pmatrix},$ $D = \begin{pmatrix} 0_2 \\ \Phi' K 1_{2 \times 1} & \Phi' C 1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$
Voir la <a href="#">figure 2.3a</a> et les relations de définition (2.29). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » I-IV du <a href="#">tableau 2.1</a> .	Voir la <a href="#">figure 2.3b</a> et les relations de définition (2.29). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » I-IV du <a href="#">tableau 2.1</a> .	Voir les relations de définition (2.29) et (2.5), et la transformation (2.7). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » I-II du <a href="#">tableau 2.1</a> .	Voir les relations de définition (2.29) et (2.5), et la transformation (2.8). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » I-II du <a href="#">tableau 2.1</a> .

**Tableau 2.6** – Description de la dynamique de la structure isolée à 2 DDL (avec frottement) illustrée dans la [figure 2.3](#), mise sous la forme du système (2.27) et ses coordonnées

Coordonnées modales complexes	
relatives	absolues
$x = q_{cr}, \quad \nu = \ddot{x}_g,$ $A = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \mathcal{V},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1},$ $f(x) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}E(x) \end{pmatrix},$ $E(x) = \begin{pmatrix} \mu F_N \operatorname{sign}(e_3' \mathcal{V} q_{cr}) \\ 0 \end{pmatrix},$ $B(x) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}T \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \end{pmatrix} \mathcal{V} q_{cr} \end{pmatrix},$ $\Delta B \equiv 0_{4 \times 1}, \quad D = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$	$x = q_{ca}, \quad \nu = \begin{pmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \end{pmatrix},$ $A = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix} \mathcal{V},$ $\Delta A \equiv 0_{4 \times 1},$ $f(x, \nu) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}E(x, \nu) \end{pmatrix},$ $E(x, \nu) = \begin{pmatrix} \mu F_N \operatorname{sign}(e_3' \mathcal{V} q_{ca} - \dot{x}_g) \\ 0 \end{pmatrix},$ $B(x) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}T \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \end{pmatrix} \mathcal{V} q_{ca} \end{pmatrix},$ $\Delta B(\nu) = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ M^{-1}T 1_{2 \times 1} \dot{x}_g \end{pmatrix},$ $D = \mathcal{V}^{-1} \begin{pmatrix} 0_2 \\ M^{-1}K 1_{2 \times 1} \quad M^{-1}C 1_{2 \times 1} \end{pmatrix},$
Voir les relations de définition (2.29) et (2.19), et la transformation (2.17). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » III-IV du <a href="#">tableau 2.1</a> .	Voir les relations de définition (2.29) et (2.19), et la transformation (2.18). À utiliser pour la synthèse de commande dans les « situations » III-IV du <a href="#">tableau 2.1</a> .

**Tableau 2.7** – [Partie II.] Description de la dynamique de la structure isolée à 2 DDL (avec frottement) illustrée dans la [figure 2.3](#), mise sous la forme du système (2.27) et ses coordonnées



## 2.2 Analyse temps-fréquence de signaux sismiques

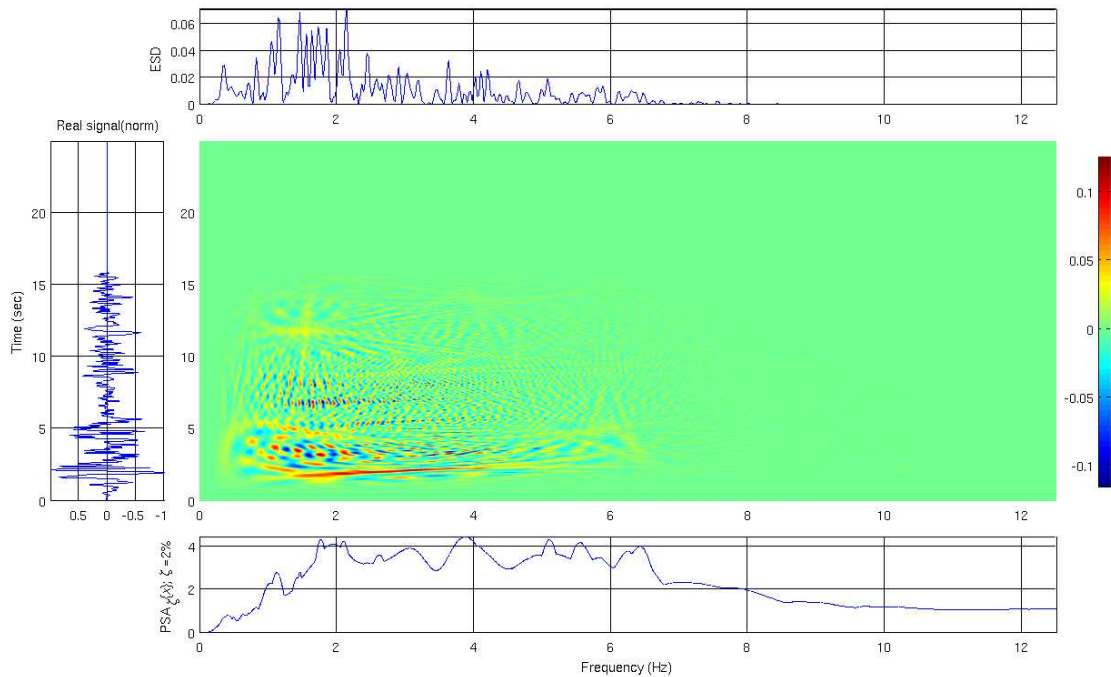
**Abréviations** Dans cette section nous allons reprendre plusieurs abréviations déjà introduites dans le [chapitre 1](#) dédié à l'état de l'art. Rappelons que les définitions de la distribution de Wigner Ville (DWV) et ses propriétés de « marginales », de la densité spectrale de l'énergie (ESD), du signal analytique, du spectre de plancher en pseudo-accelération (PSA), ont été mentionnées aux pages [49–50](#).

Pour simplifier et faciliter les explications, introduisons les nouvelles notations :

- (i) (DWVsa) Distribution de Wigner-Ville calculée à partir d'un signal analytique
- (ii) (DWVLsa) Distribution de Wigner-Ville Lissée cf. [\(1.7b\)](#), calculée à partir d'un signal analytique

**Outil numérique d'analyse de signaux** Plusieurs boîtes à outils<sup>5</sup> pour le calcul de fonctions temps-fréquence sont disponibles en ligne et en accès gratuit, voir [Swami et al., 2001](#), et [Auger et al., 1996](#), ce dernier sous licence GPL<sup>6</sup>. Ces codes sont écrits pour les logiciels Matlab et Octave<sup>7</sup>. Nous avons repris le code de [Swami et al., 2001](#), pour calculer la DWV et DWVsa et ensuite rajouté des fonctionnalités, dont la convolution en deux dimensions dans le plan temps-fréquence avec une gaussienne.

### Analyse de signaux sismiques issus d'événements naturels

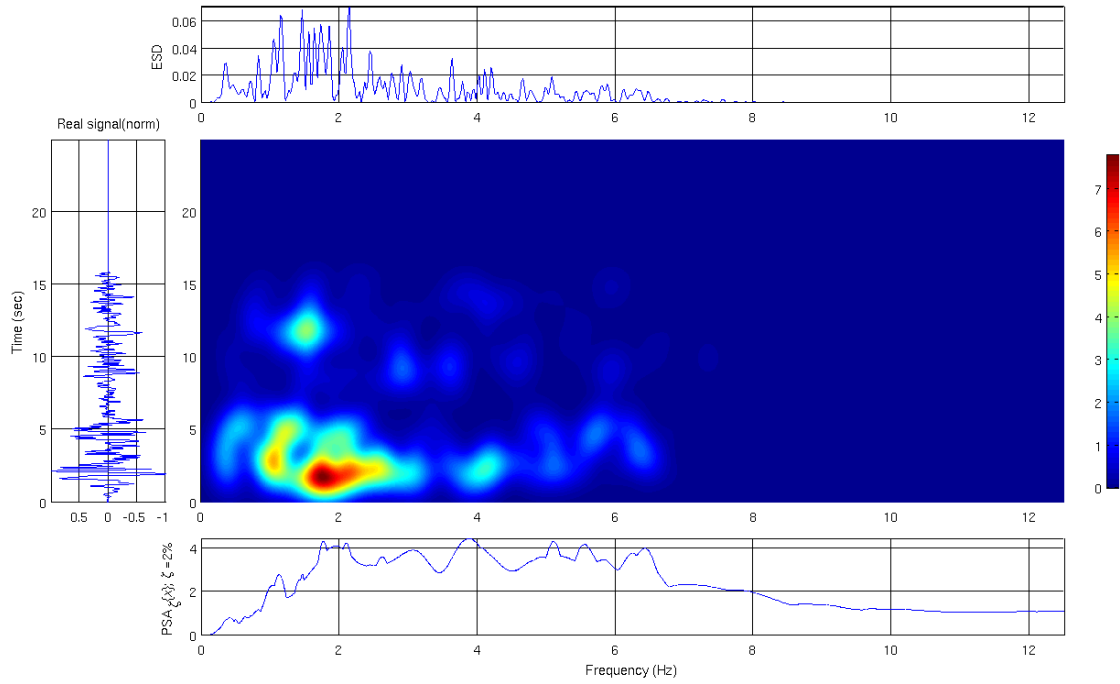


**Figure 2.5** – DWVsa du signal sismique (normalisé) El Centro

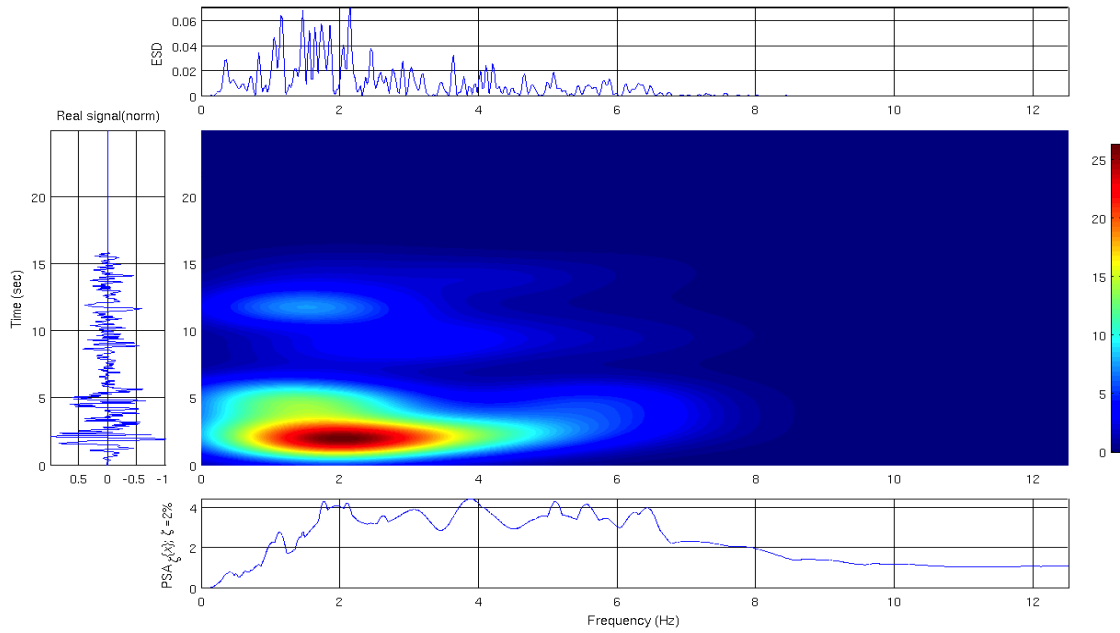
5. en anglais : toolbox

6. en anglais : GNU Public Licence

7. [www.gnu.org/software/octave/](http://www.gnu.org/software/octave/)



**Figure 2.6** – DWVLsa du signal sismique (normalisé) El Centro.  $T = \sqrt{2}$ ,  $\Omega = \sqrt{2}$



**Figure 2.7** – DWVLsa du signal sismique (normalisé) El Centro.  $T = \sqrt{2}$ ,  $\Omega = 2\sqrt{2}\pi$

Le signal sismique El Centro sera analysé dans les figures 2.5 à 2.7 : dans un premier temps nous nous intéressons principalement à l'allure des surfaces correspondant à : (i) la DWVsa dans la première figure, ensuite (ii) la DWVLsa (deux jeux de paramètres  $T$  et  $\Omega$  choisis, correspondant à différentes valeurs des variances en temps et en fréquence pour la gaussienne (1.7a)). L'accélérogramme (*i.e.*, le signal temporel correspondant à une accélération absolue du sol) se situe à gauche, en haut on retrouve l'ESD et en bas la PSA ; l'image centrale est une surface qui correspond à un représentant de la famille des fonctions DWV. Les axes de temps et en fréquence sont communes.

## Interprétation des résultats

Le module de la transformée de Fourier a une interprétation directe et accessible, à savoir que si on fait une décomposition du signal en série de Fourier, alors l'amplitude de chaque composante fréquentielle monochromatique peut être lue directement sur cette courbe. Nous avons illustré par la sous-figure en haut la densité spectrale de l'énergie qui représente le carré du module du signal sismique. En revanche, il est connu dans la littérature du traitement du signal que la DWV est difficile à interpréter : pour cela, au lieu de regarder uniquement un point (comme c'était le cas de la ESD), cette fois-ci il faut :

- (i) soit utiliser les propriétés de « marginales » et ainsi réfléchir en termes d'intégrales dans le domaine fréquentiel ; plus simplement, ceci revient à effectuer des intégrales sur des lignes droites « horizontales » dans le plan temps-fréquence et comparer à la puissance instantanée du signal temporel. Deuxièmement, il est possible de réfléchir en termes d'intégrales sur les lignes droites « verticales » et comparer à la valeur du point d'intersection sur l'ESD, soit,
- (ii) analyser une zone (*i.e.* une région) temps-fréquence « suffisamment » grande : sur les figures 2.5 à 2.7 on voit qu'une « tache » rouge apparaît notamment là où le signal est riche en contenu spectral et a une partie transitoire temporelle forte.

À partir d'un ensemble étendu de signaux sismiques analysés, nous n'avons pas observé visuellement un lien ou une relation récurrente, ou un motif<sup>8</sup> entre ces quatre sous-figures.

L'information utile dans le plan temps-fréquence doit être recherchée dans les « taches » les plus prononcées de couleur uniforme : les figures 2.5 à 2.7 confirment cette interprétation intuitive. Il s'agit d'une concentration d'énergie du signal dans le plan temps-fréquence. Au contraire, le nouage de points concentrés qui présentent des variations rapides et importantes de couleur dans le plan temps-fréquence de la DWV constituent un critère de non représentativité : (i) c'est ce qu'on visualise au cas de l'analyse d'un bruit blanc ; (ii) l'analyse de signaux simples montre que les variations rapides apparaissent dans les zones des artefacts. Par la convolution avec la gaussienne, on remarque l'effacement de ces artefacts : à comparer la figure 2.5 aux figures 2.12 et 2.14).

Par le passage depuis la DWV vers la DWVsa et la DWVLsa, respectivement, on perd les propriétés de « marginales ». Même si visuellement on a l'impression que la représentation par la DWVLsa est plus simple et accessible, mathématiquement cela revient à manipuler des intégrales triples ce qui alourdit les calculs explicites comme nous le verrons dans le chapitre suivant, à la section 3.2.3.

### Limites des distributions de Wigner-Ville en vue de la synthèse de lois de commande

La DWV n'est pas causale. En d'autres termes, afin de pouvoir calculer chaque fonction à base de DWV il est nécessaire de connaître entièrement le signal sismique (*i.e.* sur tout l'horizon de temps, le passé et le futur) : cela peut poser des problèmes dans les situations où l'on ne connaît pas à l'avance le signal. Par exemple, pour le cas de systèmes non linéaires on ne sait pas toujours exprimer les trajectoires du système, donc on ne pourra pas appliquer la DWV. En dehors de ce qui a été fait dans le cadre de cette thèse, la pseudo-DWV et

---

8. en anglais : pattern

le spectrogramme répondent à ces exigences. Dans cette situation, on perd les propriétés de « marginales » aussi.

## 2.3 Représentation de signaux sismiques

Du point de vue physique, les phénomènes sismiques sont relativement mal connus parce qu'ils sont difficiles à analyser expérimentalement, [Gibert, 1988](#). La variabilité de signaux sismiques est très étendue et concerne : (i) les accélérogrammes enregistrés par plusieurs stations sismiques proches, issus d'un même événement sismique, ou bien (ii) les accélérogrammes enregistrés par la même station sismique, mais lors de plusieurs événements qui ont lieu à des dates différentes. Le phénomène sismique est très complexe et difficile à modéliser de façon fine. Dans ce cas, il est nécessaire de tenir compte de phénomènes : (i) locaux d'amplification de site, et (ii) globaux dus à la diversité extraordinaire des couches à la surface de la Terre (voir la littérature spécifique aux domaines de la géologie, [Mari et al., 2001](#), [Mari et al., 2004](#), et sismologie, [Lay et Wallace, 1995](#)). Les modèles mathématiques sont d'une complexité qui augmente avec le nombre des caractéristiques à prendre en compte. Sachant qu'un objectif visé par ces travaux de thèse est de pouvoir effectuer la synthèse de lois de commande qui doivent opérer en temps-réel, il faudra partir de modèles de perturbations qui soient d'une complexité réduite. En d'autres termes, on ne peut se permettre que de prendre en compte certaines des caractéristiques représentatives de signaux de référence : par exemple valeur maximale de l'accélération de sol, contenu fréquentiel exprimé en termes d'un spectre de sol donné ou de quelques composantes monochromatiques identifiées *a priori*, etc.

Sachant que le caractère endommageant des signaux sismiques sur les structures est principalement dû aux composantes horizontales, dans cette section nous nous intéressons dans cette section à proposer des modèles pour ces derniers. Deux approches seront considérées : (i) une approche stochastique permettant de générer des signaux à partir d'un spectre de réponse de sol donné, et l'autre (ii) déterministe où deux classes de modèles seront proposées et faisant intervenir :

- (i) des sinusoides de fréquence donnée, mises dans des enveloppes gaussiennes, à variance et amplitude variables,
- (ii) l'équation différentielle partielle (EDP) associée au problème propagation de l'onde.

Grâce à la construction d'une base constituée d'un nombre fini de ces fonctions monochromatiques paramétrées, nous pouvons effectuer une somme qui approchera un signal donné. Une propriété intéressante pour l'automatique est que ces derniers modèles peuvent être représentés par des systèmes d'EDO.

Dans la [section 2.3.2](#) un signal sismique réel donné sera reconstruit sous forme d'une somme d'un nombre fini de termes appartenant à chacune de ces classes. Deux approches sont envisageables : (i) par des essais itératifs, ensuite comparaison avec l'original, et (ii) en utilisant un algorithme numérique d'optimisation. La fonction coût à minimiser sera choisie à partir d'un critère temps-fréquence, à savoir la DWVsa. Les figures mises à la fin du document, mettent en évidence d'une manière visuelle, accessible, les avantages et les limitations des techniques utilisés. Enfin, cet exercice nous permettra d'avoir un premier aperçu sur la nature non convexe des fonctions de DWV, qui seront reprises dans le [chapitre 3](#).

### 2.3.1 1<sup>re</sup> classe : signaux générés par une méthode stochastique connue

#### Point sur la réglementation en vigueur et les recommandations

La réglementation française concernant la sûreté nucléaire, [ASN, 2001](#), demande que les Installations Nucléaires de Base (INB) associées aux divers sites géographiques soient capables de supporter des sollicitations sismiques ayant un spectre de réponse du sol *a priori* donné. Ce document spécifie que la prise en compte de ces spectres de sol doit se faire lors de la phase de dimensionnement des nouvelles installations, aussi bien que pour ceux qui sont actuellement en exploitation, [Viallet et al., 2010](#). Des réglementations similaires relevant du domaine de la sûreté nucléaire existent dans d'autres pays, par exemple (i) [IAEA, 2003](#), de l'*International Atomic Energy Agency (IAEA)*; (ii) [Braverman et al., 2007](#), de l'*U.S. Nuclear Regulatory Commission* aux États-Unis.

En parallèle, il est possible de mentionner des analogues en génie civil qui concernent les structures conventionnelles, par exemple, les normes européennes [CEN, 2004](#), et les codes [Naeim et Kelly, 1999](#), §7.8, qui s'appliquent aux États-Unis. Ces réglementations sont complétées par des recommandations méthodologiques, par exemple dans [FEMA, 2009](#). Au vu de toutes ces réglementations et recommandations, il est donc important de prendre en compte et d'intégrer l'information sur les spectres de sol pour évaluer le comportement des structures isolées. Dans nos travaux du chapitre suivant, nous allons utiliser des spectres de sol pour générer une famille de signaux sismiques artificiels qui seront utilisés pour calibrer et valider les schémas de contrôle.

#### Plusieurs réalisations à partir d'un spectre de sol connu

Afin de pouvoir générer de façon artificielle plusieurs accélérogrammes, nous choisissons de partir des données de référence indiquées dans [Langeoire, 2010](#) : il s'agit d'un spectre de sol de type rocheux du site de Cadarache (CEA), situé au sud de la France. Ce choix est justifié par les arguments, [Politopoulos et Pham, 2011](#), pp. 9, [Pham, 2010](#), §5.2.1 :

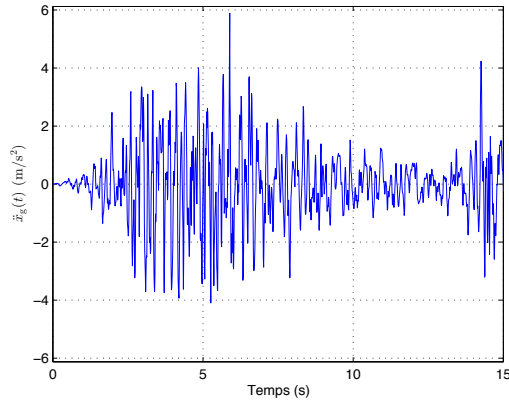
- l'isolation sismique trouve son intérêt sur des sols durs, [Gupta et Hall, 1990](#), §2, Fig. 2.5, [Naeim, 2001](#), §14.6, qui amplifient les hautes fréquences (et donc les modes supérieurs),
- les signaux sismiques générés seront *suffisamment* riches en contenu spectral pour exciter les modes supérieurs. En pratique, cette situation correspond au cas où le site à protéger n'est pas trop proche à l'épicentre, [Scruggs et Gavin, 2011](#), §30.3.2. Précisons que les techniques de contrôle semi-actif présentés dans le [chapitre 3](#) trouvent leur intérêt pratique principalement parce que l'on suppose que les signaux sismiques sont capables d'exciter ces modes non-isolés. À défaut, les solutions contrôle passif sont suffisantes.

D'autre part, le spectre de sol de référence est amplifié pour pouvoir construire une famille de signaux sismiques *forts* avec des niveaux d'accélération absolue du sol de maximum <sup>9</sup>  $0.6g$ , où  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . Ces signaux seront utilisés pour calibrer et valider les schémas de contrôle proposés dans le [chapitre 3](#).

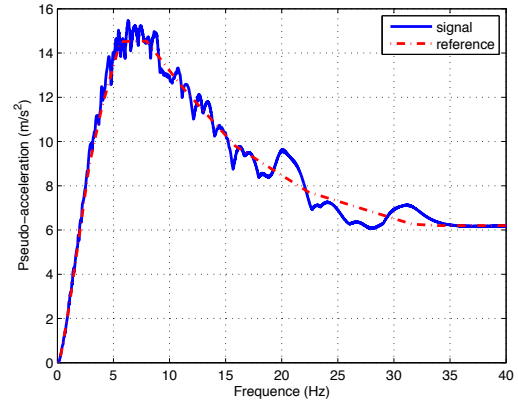
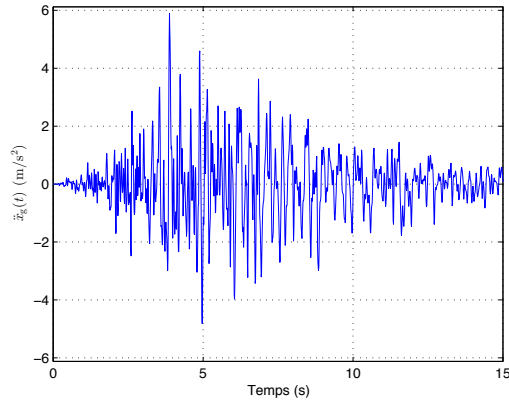
9. en anglais : Peak Ground Acceleration (PGA)

Précisons que le spectre de sol de référence est issu d'un travail des sismologues et géologues. Pour des détails sur la façon dont ces spectres de sol sont calculés, le lecteur pourra se référer à [Gupta et Hall, 1990](#), §2, [Clough et Penzien, 2003](#), §25.

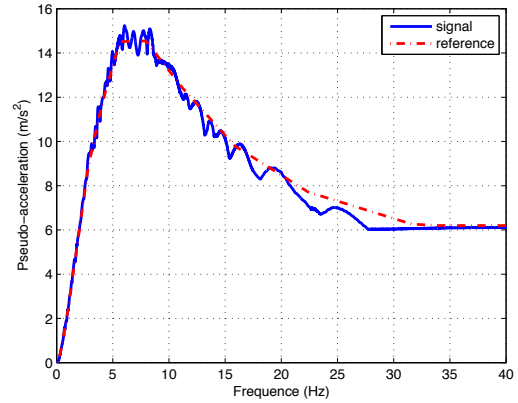
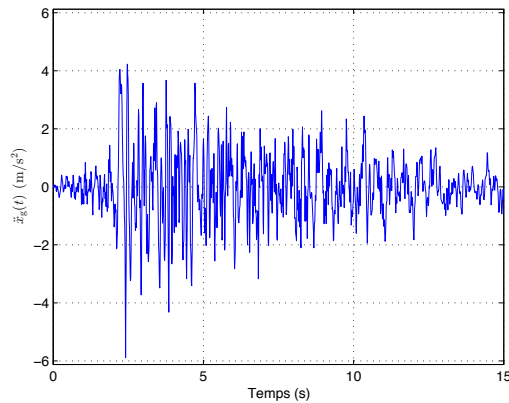
**Calcul numérique** Un des algorithmes numériques souvent utilisé au laboratoire EMSI pour générer des signaux sismiques à partir d'un spectre de sol donné repose sur l'algorithme de [Levy et Wilkinson, 1976](#). Celui-ci sera repris dans ces travaux de thèse. L'algorithme consiste à générer un signal sous la forme d'une somme de plusieurs sinusoides déphasées, où la phase est tirée de façon aléatoire. Voir plus de détails dans [Gibert, 1988](#), §20.5.6, [Vanmarcke, 1976](#). Les [figures 2.8 à 2.10](#) illustrent trois accélérogrammes et les spectres de sol associés.



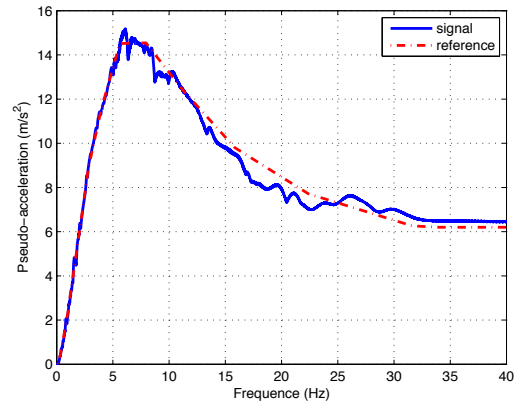
(a) Accélérogramme

(b) spectres de réponse du sol, pour un taux d'amortissement  $\zeta = 5\%$ **Figure 2.8** – Signal sismique artificiel n°1 généré à partir du spectre de sol de référence du site de Cadarache

(a) Accélérogramme

(b) spectres de réponse du sol, pour un taux d'amortissement  $\zeta = 5\%$ **Figure 2.9** – Signal sismique artificiel n°2 généré à partir du spectre de sol de référence du site de Cadarache

(a) Accélérogramme

(b) spectres de réponse du sol, pour un taux d'amortissement  $\zeta = 5\%$ **Figure 2.10** – Signal sismique artificiel n°3 généré à partir du spectre de sol de référence du site de Cadarache

### 2.3.2 2<sup>e</sup> classe : signaux polychromatiques

#### Formule explicite

Introduisons la classe paramétrée suivante :

$$f_{\Gamma}(t) = A_{\text{Sh}} e^{j\varphi} e^{j2\pi\nu_{\text{Sh}}t} e^{-\frac{(t-t_{\text{Sh}})^2}{2\sigma^2}} \quad (2.31)$$

où le vecteur des paramètres  $\Gamma = (A_{\text{Sh}} \ \varphi \ \sigma \ t_{\text{Sh}} \ \nu_{\text{Sh}})'$  : l'amplitude  $A_{\text{Sh}} > 0$ , la phase  $\varphi \in [-\pi, \pi]$ , l'écart type  $\sigma > 0$ , le décalage temporel  $t_{\text{Sh}} \in \mathbb{R}$ , le décalage fréquentiel  $\nu_{\text{Sh}} > 0$ .

Pour notre étude, cette fonction a deux propriétés intéressantes :

- (i) la partie réelle de l'équation (2.31) représente la solution de l'EDO suivante :

$$\frac{d^2 f}{dt^2}(t) = -2\frac{t-t_{\text{Sh}}}{\sigma^2} \frac{df}{dt}(t) - \left[ \frac{1}{\sigma^2} + (2\pi\nu_{\text{Sh}})^2 + \left( \frac{t-t_{\text{Sh}}}{\sigma^2} \right)^2 \right] f(t) \quad (2.32a)$$

sous les conditions initiales :

$$f(t_0) = A_{\text{Sh}} \Re \left\{ e^{(2\pi\nu_{\text{Sh}}t_0 + \varphi)j} \right\} e^{-\frac{(t_0-t_{\text{Sh}})^2}{2\sigma^2}} \quad (2.32b)$$

$$\frac{df}{dt}(t_0) = -\frac{t_0-t_{\text{Sh}}}{\sigma^2} f(t) - 2\pi\nu_{\text{Sh}} A_{\text{Sh}} e^{-\frac{(t_0-t_{\text{Sh}})^2}{2\sigma^2}} \Im \left\{ e^{(2\pi\nu_{\text{Sh}}t + \varphi)j} \right\} \quad (2.32c)$$

où  $t_0 \in \mathbb{R}$ .

On pourra s'assurer que la partie réelle de l'équation (2.31) vérifie bien l'équation (2.32a), par des dérivations successives de (2.31).

- (ii) la DWV se calcule de façon exacte sous la forme :

$$W_f(t, \omega) = \frac{1}{2\pi} A_{\text{Sh}}^2 e^{-\frac{(t-t_{\text{Sh}})^2}{\sigma^2}} \sqrt{2\sigma^2} e^{-\sigma^2(\omega-\omega_{\text{Sh}})^2}$$

Cette propriété peut être utilisée pour valider les résultats numériques.

#### Synthèse de signaux sismiques, par la somme de plusieurs termes

Nous partons du même signal sismique réel Kobé  $y(t)$ , analysé dans la figure 1.12a. Par une procédure d'essais itératifs, nous sommes capables de l'approcher par la somme de trois termes du type (2.31) cf. aux figures 2.11 et 2.12, soit

$$\tilde{y}_{\text{ini}}(t) = \Re(f_{\Gamma_1}(t) + f_{\Gamma_2}(t) + f_{\Gamma_3}(t)) , \quad (2.33)$$

où

$$\begin{aligned} \Gamma_1 &= (0.62 \ 1.56 \ 0.4 \ 4.2 \ 1.28) , \\ \Gamma_2 &= (0.5 \ 1.6 \ 0.35 \ 7.8 \ 2.6) , \\ \Gamma_3 &= (0.12 \ 1.9 \ 3.48 \ 10.2 \ 0.8) . \end{aligned}$$



### Optimisation numérique. Fonction coût temps-fréquence

Nous proposons d'utiliser comme fonction coût, un critère temps-fréquence sous la forme :

$$J_{T,\Omega}[\varepsilon] = \int_0^T \int_{-\Omega}^{\Omega} \left( W_{\mathcal{A}[\varepsilon(t)]} \right)^2 d\omega dt = \int_0^T \int_0^{\Omega} \left( W_{\mathcal{A}[\varepsilon(t)]} \right)^2 d\omega dt \quad (2.34)$$

où l'opérateur  $\mathcal{A}[\varepsilon(t)]$  représente le *signal analytique* appliqué à  $\varepsilon(t)$ , et

$$\varepsilon(t) = y(t) - \Re \left( \sum_i f_{\Gamma_i}(t) \right),$$

où  $f_{\Gamma_i}(t)$  est donné par une fonction paramétrée de type (2.31).

L'algorithme d'optimisation numérique choisi, est *Nelder-Mead simplex direct search*<sup>10</sup> qui : (i) a la caractéristique de ne pas nécessiter le calcul du gradient de la fonction à minimiser, (ii) est connu avoir un bon comportement pour les fonctions à minimiser très bruitées avec de nombreux minima locaux.

Les valeurs qui définissent les « pavés » temps-fréquence dans (2.34), sont choisies telles que  $T$  soit égal à la longueur du signal sismique réel  $y(t)$  et  $\Omega$  soit la valeur maximale de la pulsation à laquelle nous nous intéressons.

En partant de la condition initiale (2.33), l'algorithme d'optimisation trouvera la solution finale (sous-optimale)

$$\tilde{y}(t) = \Re \left( f_{\Gamma_4}(t) + f_{\Gamma_5}(t) + f_{\Gamma_6}(t) \right) \quad (2.35)$$

représentée dans les figures 2.13 et 2.14, où

$$\begin{aligned} \Gamma_4 &= \begin{pmatrix} 0.5454 & 1.9104 & 0.5029 & 4.1412 & 1.26 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_5 &= \begin{pmatrix} 0.4098 & 0.6393 & 0.4710 & 7.8176 & 2.623 \end{pmatrix}, \\ \Gamma_6 &= \begin{pmatrix} 0.0382 & 3.3646 & 1.7303 & 9.7842 & 0.7871 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

La DWVsa de l'écart  $\varepsilon(t)$  entre le signal sismique  $y(t)$  et la solution donnée par l'algorithme d'optimisation (à savoir la courbe verte dans la figure 2.13), est illustré dans la figure 2.15. Pour simplifier la lecture comparée des DWVsa dans les figures 2.12, 2.14 et 2.15, le même code de couleurs a été utilisé en fixant pareillement le domaine d'affichage des axes.

### Validation numérique de la solution sous-optimale

Est-ce que la solution finale de l'optimisation numérique est la même si on part d'une condition initiale différente de l'équation (2.33) ? Pour répondre à cette question, nous avons utilisé la méthode de *recuit simulé*<sup>11</sup> : on définit un ensemble de nouveaux points initiaux situés au coins d'un hypercube, définis par des variations de  $\pm 10\%$  de chaque valeur de l'ensemble de paramètres. Au centre de l'hypercube se trouve la solution (2.35). En utilisant 3 termes du type (2.31) on aura  $3 \times 5$  paramètres à optimiser et donc un ensemble de  $2^{15}$  points initiaux. Chacun de ces nouveaux points constitueront une nouvelle condition initiale à partir de laquelle

10. voir la documentation sur la fonction `fminsearch` sous matlab

11. en anglais : `simulated annealing`

l'algorithme d'optimisation est relancé. Les calculs numériques sont lents. Le résultat, est qu'on ne trouve pas de solution meilleure, en termes de l'évaluation du critère (2.34). Donc on pourrait en conclure que la solution sous-optimale (2.35) est suffisamment représentative par rapport à un petit ensemble de points situés autour, en utilisant (2.34) comme critère d'appréciation.

Deuxièmement, signalons que ces résultats numériques nous ont fait découvrir que les points situés dans les coins de l'hypercube et le point de son centre, n'appartiennent pas toujours au même bassin d'attraction.

### Évaluation quantitative des résultats

Afin de quantifier la contribution de chaque nouveau terme dans le processus d'approximation d'un signal sismique donné, on propose d'introduire une normalisation à partir de (2.34), pour en construire la fonction

$$J_2 = \frac{J_{T,\Omega}[y - \tilde{y}]}{J_{T,\Omega}[y]}, \quad (2.36)$$

qui sera utilisée comme un moyen de mesure et d'interprétation quantitative de la bonne/mauvaise approximation de  $\tilde{y}(t)$ . Dans le cas idéal où  $y = \tilde{y}$ , l'évaluation donne  $J_2 = 0$ ; au contraire, si  $\tilde{y} \equiv 0$ , alors  $J_2 = 1$ . Il est à noter que  $J_2$  peut prendre des valeurs supérieures à 1.

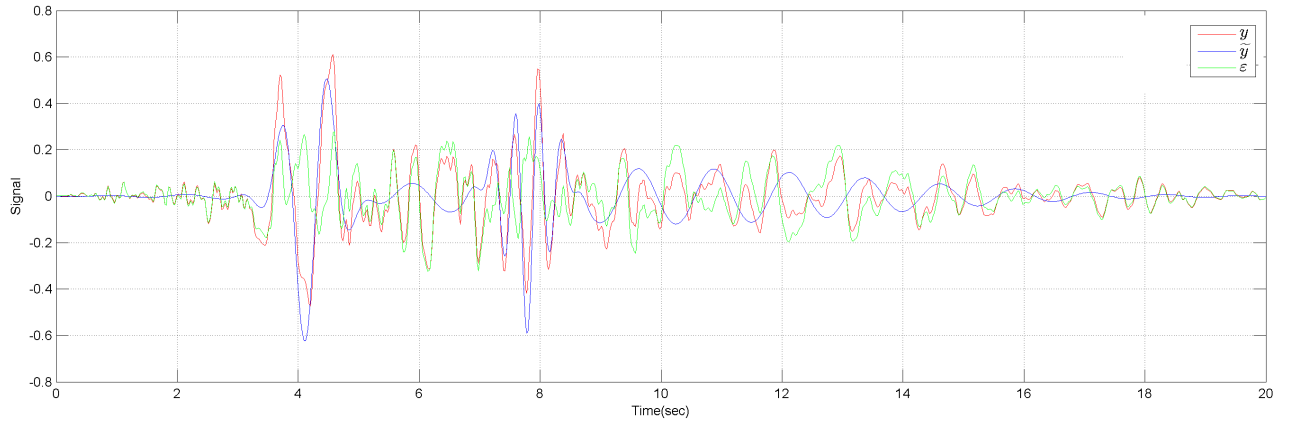
Pour résumer le travaux sur cette section, nous avons approché le signal sismique  $y(t)$ , par la somme d'un nombre fini de fonctions de base de type (2.31), pour en obtenir le signal  $\tilde{y}(t)$ . Nous allons maintenant effectuer une analyse quantitative de l'apport de chaque terme, en prenant successivement les termes du signal (2.33), (depuis le premier terme à gauche vers la droite) et on utilisera comme indicateur, le critère temps-fréquence (2.36). Ensuite nous allons passer à la solution finale (2.35). On fixe  $T$  à la longueur du signal sismique et  $\Omega = 2\pi \times 12.5$ . Voir le [tableau 2.8](#). Ces résultats montrent une meilleure approximation du signal sismique après avoir effectué l'optimisation.

Approximations successives du signal sismique	$J_2$ cf. (2.36)
1 <sup>er</sup> terme du $\tilde{y}(t)$ cf. (2.33)	0.3881
2 termes du $\tilde{y}(t)$ cf. (2.33)	0.1854
$\tilde{y}(t)$ cf. (2.33)	0.2910
1 <sup>er</sup> terme du $\tilde{y}(t)$ cf. (2.35)	0.3563
2 termes du $\tilde{y}(t)$ cf. (2.35)	0.1490
$\tilde{y}(t)$ cf. (2.35)	0.1431

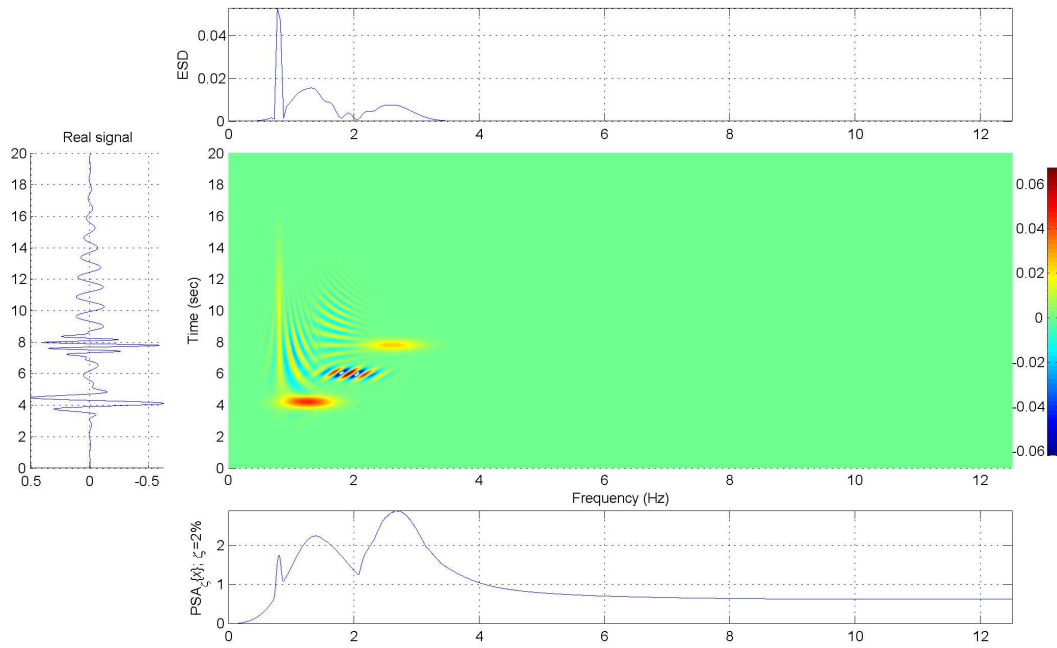
**Tableau 2.8** – Analyse quantitative des résultats, avant et après l'optimisation.

### Discussion sur la représentativité de cette classe de fonctions de base

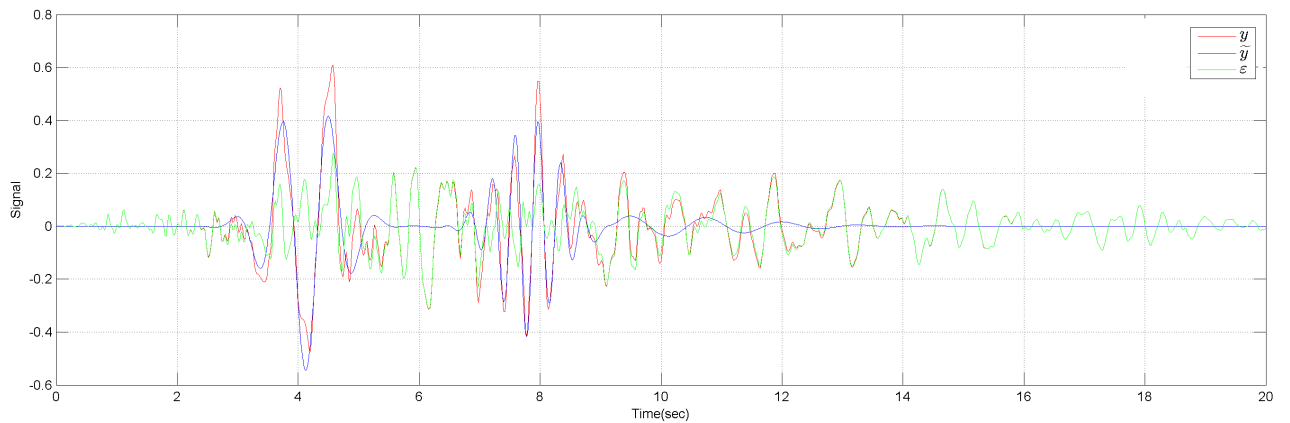
On constate à partir des [figures 2.11](#) et [2.13](#) la tendance de bien reproduire la partie forte des signaux. Au contraire, les parties moins prononcées sont plutôt mal approchées. En dehors de l'objectif de cette thèse, précisons qu'on s'attend à pouvoir représenter correctement les signaux sismiques données, en utilisant plusieurs dizaines de ces fonctions de base paramétrés de façon appropriée.



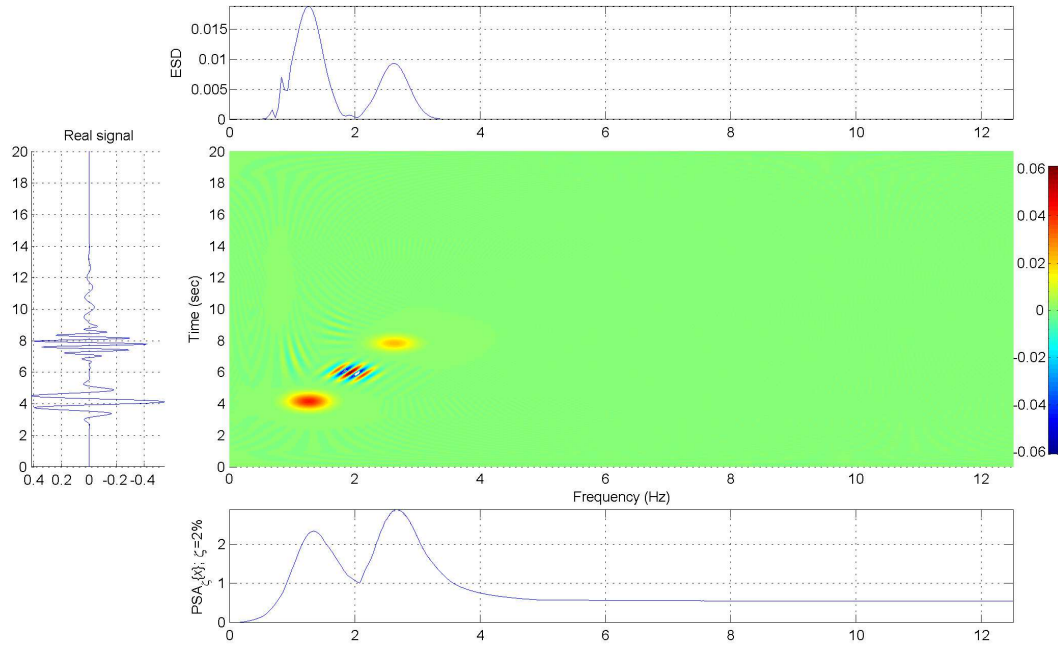
**Figure 2.11** – Signal sismique réel Kobe  $y(t)$  ; son approximation initiale  $\tilde{y}(t)$  cf. (2.33), donnée par la somme de 3 termes du type (2.31) ; l'écart de ces deux courbes  $\varepsilon(t)$



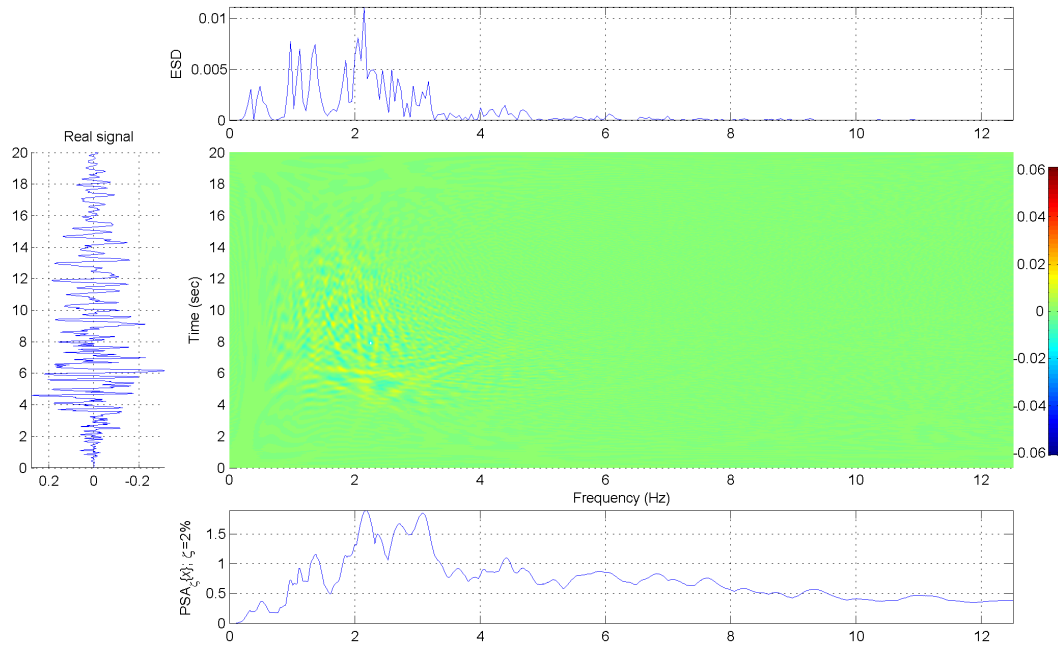
**Figure 2.12** – DWVsa du signal  $\tilde{y}(t)$  cf. (2.33)



**Figure 2.13** – Signal sismique réel Kobe  $y(t)$  ; la solution finale  $\tilde{y}(t)$  cf. (2.35) issue de l'algorithme d'optimisation ; l'écart de ces deux courbes  $\varepsilon(t)$



**Figure 2.14** – DWVsa de la solution finale  $\tilde{y}(t)$  cf. (2.35), issue de l'algorithme d'optimisation



**Figure 2.15** – DWVsa de l'ecart  $\varepsilon(t)$  à la fin de l'optimisation

### 2.3.3 3<sup>e</sup> classe : signaux générés par l'équation différentielle partielle (EDP) du problème de propagation d'onde

Comme nous l'annonçons, nous allons maintenant approcher les accélérogrammes par des solutions des EDP associées aux problèmes de propagation de l'onde. Deux stratégies s'offrent à nous : (i) essayer de prendre en compte dès le début, dans la construction des hypothèses, la nature physique du processus sismique, et (ii) négliger ces aspects physiques et traiter la propagation d'ondes en tant qu'objet

mathématique. Dans la suite étudierons la première piste dans un cadre précis, nous montrerons les difficultés rencontrées, et ensuite nous élargirons nos investigations à la seconde piste.

### Une tentative de synthèse de signaux sismiques en utilisant la physique du processus sismique

L'étude de la modélisation de phénomènes de propagation d'ondes sismiques part souvent d'un ensemble d'hypothèses qui ont des significations physiques. Dans ce qui suit, nous cherchons à représenter des phénomènes de propagation d'ondes monochromatiques dans un milieu à trois dimensions (3D) de l'espace, milieu qui est supposé être élastique, homogène et isotrope. Sous l'hypothèse de symétrie axiale (*i.e.* cas axisymétrique) le problème est ramené en deux dimensions (2D), en coordonnées cylindriques. Afin de visualiser ce passage il faut se représenter mentalement un schéma avec plusieurs cylindres qui ont une axe commun, successivement emboîtés.

Partons de l'EDP du problème de propagation d'onde en 2D écrite en coordonnées polaires. Sous l'hypothèse de symétrie radiale, [Kreyszig, 2005](#), pp. 580, on retrouve une EDP à une dimension (1D) de l'espace, notée  $r \in \Omega_r$ , où le domaine d'espace est semi-infini,  $\Omega_r = [0, \infty)$ . La source excitatrice est une impulsion verticale, appliquée en  $r = 0$ , le long de tout l'axe verticale (voir [Kausel, 2006](#), Fig. 3.1(a), §3), qui pourrait être associée à une faille sismique. Enfin, on retrouve le problème de Cauchy suivant :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(t, r) = c^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(t, r) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(t, r) \right) + \delta(r) H(t) \Re(e^{\alpha t}) \quad \text{dans } \mathbb{R}_{\geq 0} \times \Omega_r \quad (2.37a)$$

sous les deux conditions initiales :

$$\Phi(0, r) = 0 \quad \text{dans } \Omega_r \quad (2.37b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(0, r) = \delta(r) \quad \text{dans } \Omega_r \quad (2.37c)$$

où  $t$  représente le temps et  $\Phi$  est un potentiel scalaire ; le paramètre  $\alpha \in \mathbb{C}$  est choisi tel que  $\Re(\alpha) < 0$ , pour ainsi assurer une enveloppe décroissante ;  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  est la célérité ;  $\delta(\cdot)$  est la distribution de Dirac ;  $H(\cdot)$  est la fonction de Heaviside. L'équation (2.37) représente une EDP hyperbolique, du second ordre, linéaire, non homogène, [Polyanin et Manzhirov, 2007](#), pp. 1279, [Kreyszig, 2005](#), pp. 535. On retrouve deux conditions, dont la première condition initiale homogène est complétée par une seconde, non homogène, qui concerne la dérivée en temps de la fonction scalaire  $\Phi$ .

**Solution analytique** La célérité  $c$  représente la vitesse de propagation de l'onde et n'a pas d'influence sur l'allure de celle-ci. On fixe  $c = 1$ . La solution de l'équation (2.37) est donnée par

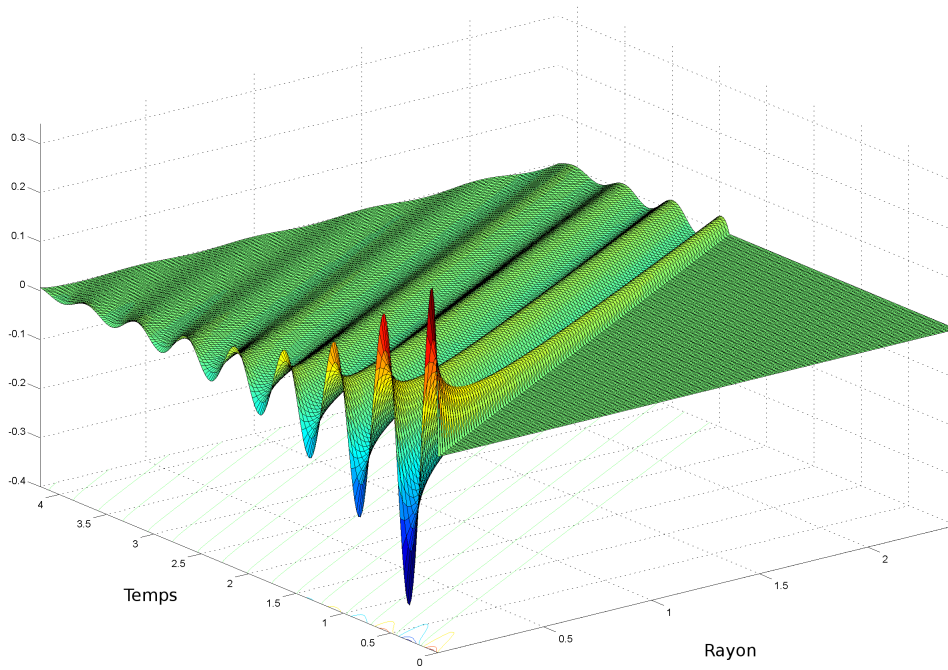
$$\Phi_\alpha(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^t \Re(e^{\alpha\tau}) H(\tau) \frac{H((t-\tau)^2 - r^2)}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}} d\tau$$

(voir Polyanin, 2002, § 4.1.2, Veselov, 2002, Polyanin et Manzhirov, 2007, pp. 623), ce qui revient à calculer<sup>12</sup>

$$\Phi_\alpha(t, r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{|t-r|_+} \Re(e^{\alpha\tau}) \frac{1}{\sqrt{(t-\tau)^2 - r^2}} d\tau \quad (2.38)$$

où, pour des valeurs de  $\zeta \in \mathbb{R}$ , on introduit la définition

$$|\zeta|_+ \triangleq \max\{\zeta, 0\} = \begin{cases} \zeta & \text{si } \zeta \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



**Figure 2.16** –  $\Phi_\alpha(t, r)$  cf. (2.38);  $\alpha = -1 + 12j$ ;  $c = 1$

Il est à noter que l'intégrale (2.38) contient une singularité en  $\tau = t - r$ . Pour résoudre ce problème, nous utilisons la formule d'intégration par parties, pour trouver la solution suivante :

- si  $t \leq r \Rightarrow |t - r|_+ = 0$  d'où  $\Phi_\alpha(t, r) = 0$ .
- si  $t > r$ , alors

$$\begin{aligned} \Phi_\alpha(t, r) &= \frac{1}{2\pi} \left[ \ln(r) \Re(e^{\alpha(t-r)}) - \ln(t - \sqrt{t^2 - r^2}) \right. \\ &\quad \left. - \int_0^{t-r} \ln \left| (\tau - t) + \sqrt{(t - \tau)^2 - r^2} \right| \Re(\alpha e^{\alpha\tau}) d\tau \right] \end{aligned} \quad (2.39)$$

Cette fois-ci, par rapport à la formule (2.38), l'intégrale à calculer dans (2.39) ne contient plus de singularité. En revanche il y a un autre problème qui apparaît, à savoir en  $r = 0 \Rightarrow \ln(r) = -\infty$ . Une solution rapide est d'enlever ce point du domaine d'observation. Il est assez clair que cette voie commence à poser un certain nombre de problèmes au niveau de la résolution théorique de (2.39). Nous allons revenir sur ce point, mais avant, précisons quelle est son interprétation.

12. The Wave Equation. <http://eqworld.ipmnet.ru/en/solutions/lpde/lpde205.pdf>



**Interprétation physique** Du point de vue physique, dans le cas général des *ondes de volume*,  $\Phi_\alpha$  est un potentiel scalaire et son gradient correspond au déplacement physique (qui est un vecteur) de la composante P (*i.e.* primaire) d'un signal sismique (voir par exemple, [Pecker, 2010b](#), §9.3). Ensuite, par double dérivation nous aurions dû arriver à la formule de l'accélération physique qui aurait pu être utilisée comme fonction de base pour essayer d'approcher un accélérogramme sismique donné.

En d'autres termes, en partant de (2.39), nous aurions dû appliquer deux opérations consécutives : calculer le gradient suivi d'une double dérivation. Rien que la première opération n'est pas évidente, sachant que nous n'avons pas trouvé un moyen d'exprimer l'intégrale qui apparaît dans (2.39) par des fonctions élémentaires. C'est pourquoi nous avons décidé de renoncer à continuer sur cette voie qui consistait à prendre en compte la physique du processus sismique. Au lieu de chercher une autre équation à base de l'EDP de l'onde avec une solution analytique connue, on décide de prendre une autre direction qui semblerait plus adaptée vu l'objectif de l'intégration des modèles de signaux sismiques sur des schémas de contrôle.

### Une approche par transformation vers un système d'équations différentielles ordinaires (EDO)

Au lieu de partir directement à la recherche de solutions analytiques d'EDP, une alternative consiste à exprimer dans un premier temps leur dynamique par un système d'EDO. Dans un second temps, il est possible de partir à la recherche des solutions explicites. Cette approche a ses avantages du point de vue de l'automaticien désireux de les utiliser comme modèles en vue de la commande, plus habitué à travailler avec les EDO. En d'autres termes, dans cette section ce n'est pas la solution analytique de l'EDP que l'on cherche et à partir de laquelle nous pensons représenter les signaux sismiques, mais plutôt nous cherchons à décrire la dynamique de modèles de signaux sismiques par des systèmes d'EDO. L'approche standard en automatique qui consiste à représenter ces modèles par des systèmes avec des entrées et des sorties sera reprise ici. Entre autres, un de ses avantages consiste dans sa facilité de calcul numérique : les schémas de résolution d'EDO existent dès les versions standard des logiciels (Matlab, Octave, etc.).

Par rapport à la section précédente, dans cette section :

- (i) la physique du processus sismique sera négligée dans un premier temps. Sans se soucier de l'interprétation physique de la variable  $\Phi$  nous allons définir un modèle mathématique à base de l'EDP de l'onde dans un cadre élargi par rapport à l'équation (2.37) au sens où on souhaite tester une diversité de : (i) conditions initiales, (ii) conditions aux limites du domaine spatial, et (iii) termes sources.
- (ii) on part de l'hypothèse que le domaine de l'espace est fini, soit  $\overline{\Omega}_r \in [0, L]$ , où  $L > 0$ . Si  $L$  est « suffisamment » grand, alors on peut assimiler  $\overline{\Omega}_r$  à un espace semi-infini.

Pour résumer, la démarche de cette section consiste à utiliser un schéma numérique pour modéliser l'EDP du problème de propagation d'onde. Cette classe est plus générale et inclut celle précédemment étudiée (2.37). Ensuite, dans la [section 2.3.4](#), nous allons montrer que par cette approche, on peut facilement intégrer ces mo-

dèles de perturbation (*i.e.*, signaux sismiques connus *a priori*), dans un schéma de contrôle.

**Mise en equation** Soit le problème de propagation d'onde :

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t^2}(r, t) = c^2 \left( \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(r, t) + \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, t) \right) + s(r, t) \quad \text{dans } \overline{\Omega_r} \times \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (2.40a)$$

avec les deux conditions initiales :

$$\Phi(r, 0) = \Phi_{t_0}(r) \quad \text{dans } \overline{\Omega_r} \quad (2.40b)$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t}(r, 0) = \Psi_{t_0}(r) \quad \text{dans } \overline{\Omega_r} \quad (2.40c)$$

et les deux conditions aux limites de Dirichlet :

$$\Phi(0, t) = \Phi_0(t) \quad \text{dans } \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (2.40d)$$

$$\Phi(L, t) = \Phi_L(t) \quad \text{dans } \mathbb{R}_{\geq 0} \quad (2.40e)$$

Les fonctions qui définissent les conditions, à savoir  $\Phi_{t_0}(r)$ ,  $\Psi_{t_0}(r)$ ,  $\Phi_0(t)$  et  $\Phi_L(t)$ , sont continues et peuvent être *non homogènes*, voir, par exemple, [Allaire, 2007](#), pp. 116;  $s(r, t)$  est appelé terme source<sup>13</sup>;

L'équation (2.40a), représente une EDP *non homogène* (voir [Kreyszig, 2005](#), pp. 535), non linéaire (à cause du facteur  $1/r$ ). Parfois on retrouve cette EDP exprimée en coordonnées polaires dans la littérature comme étant un cas particulier de l'équation de *convection-diffusion*, [Allaire, 2010](#), pp. 5, où l'on peut facilement identifier le terme de diffusion dans un espace à une dimension, sous la forme du laplacien dans un espace à une dimension  $\Delta \Phi(r, t) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(r, t)$ ; le terme de convection (*i.e.*, d'advection, ou de transport)  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(r, t)$  à une vitesse variable, dépendant de la position en espace, à cause du facteur  $1/r$ .

**Résolution (calcul) numérique : un schéma par semi-discrétisation en espace et continu en temps** Le schéma numérique qui va être présenté ci-après est connu dans la littérature [Allaire, 2010](#), pp. 189. En particulier, dans l'article [Santiago et al., 2011](#), ce schéma numérique est utilisé pour modéliser la dynamique du profil de courant plasma en partant d'une EDP différente de l'équation (2.40); la transformation vers un système d'EDO permet l'application d'un algorithme de contrôle linéaire de type LQR. Il est à signaler que les travaux de [Santiago et al., 2011](#), se placent dans la continuité du stage de master recherche de [Teodorescu, 2008](#).

Commençons par quelques considérations numériques :

- (i) Du point de vue du schéma numérique, les deux conditions initiales (2.37b)–(2.37c) peuvent être assimilés à une seule, du genre (2.40b) : avoir une condition initiale en  $\Phi(r, 0)$ , se traduit numériquement, sur un maillage fini dans le domaine temps-espace (voir l'évolution temporelle le long des lignes verticales et celle en espace le long des lignes horizontales sur la [figure 2.17](#)), par

---

13. en anglais : sink term

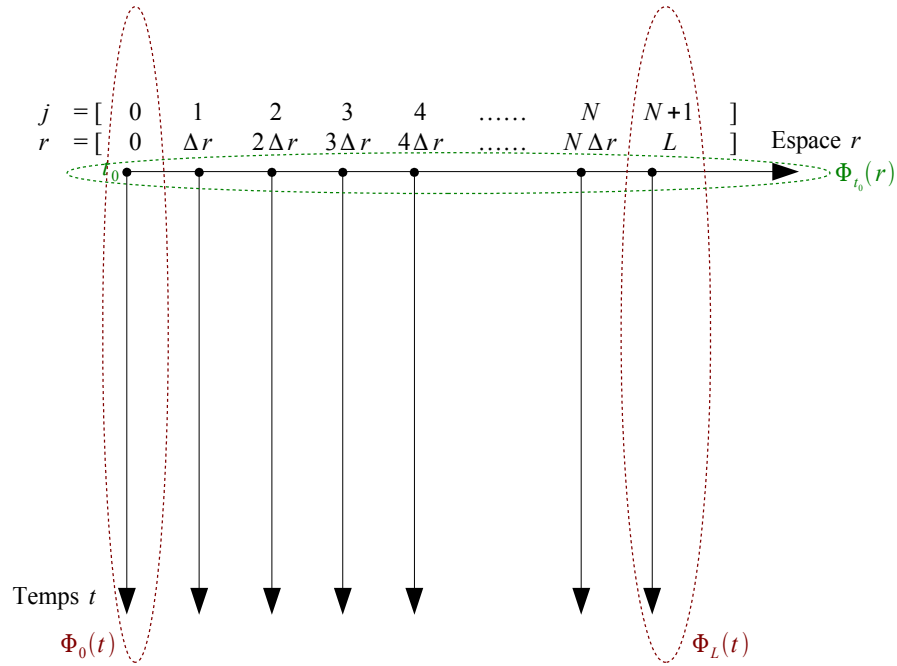


le fait d'attribuer des valeurs sur chaque nœud de la première ligne. Tenir compte d'une deuxième condition initiale, sous forme d'approximations au premier ordre  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}(r, 0) \approx \frac{\Phi(r, \Delta t) - \Phi(r, 0)}{\Delta t}$ , revient à attribuer des valeurs sur chaque nœud de la seconde ligne, connaissant les valeurs sur la première ligne. Du point de vue du schéma numérique, on retrouve donc un phénomène de redondance, c'est pourquoi nous pouvons supprimer entièrement la première ligne, et redéfinir *i.e.* recalculer (à la main) une nouvelle condition initiale en  $\Phi(r, \tilde{t}_0)$ , où  $\tilde{t}_0 = t_0 + \Delta t$ , sachant que pour notre problème (2.40),  $t_0 = 0$ .

- (ii)  $\Phi_{t_0}(r)$  et  $\Phi_0(t)$  ont une valeur commune en l'origine, *i.e.*  $\Phi_{t_0}(0) = \Phi_0(0)$ .
- (iii) Nous avons besoin d'une estimation de la distribution de Dirac, pour effectuer des calculs numériques. On propose d'utiliser

$$\mathbb{J}_{T_0}(\tau) \triangleq \frac{1}{T_0} \mathbb{J}\left(\frac{\tau}{T_0}\right) \quad \text{où} \quad \mathbb{J}(\tau) \triangleq \begin{cases} 1 & \text{si } \tau \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (2.41)$$

**Principe de la méthode :** À partir de l'équation (2.40a), nous allons proposer un schéma numérique qui est continu en temps et discrétisé en espace.



**Figure 2.17** – Domaine espace-temps  $\bar{\Omega}_r \times \mathbb{R}_{\geq 0}$  pour la mise en œuvre du schéma numérique. Discretisation en espace.

Le développement Taylor des deux fonctions  $\Phi(r + \Delta r, t)$  et  $\Phi(r - \Delta r, t)$  autour du point  $(r, t)$  correspond à

$$\begin{aligned} \Phi(r + \Delta r, t) &= \Phi(r, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, t)(r + \Delta r - r) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(r, t) \frac{(r + \Delta r - r)^2}{2} \\ &\quad + \mathcal{O}((r + \Delta r - r)^3) \\ \Phi(r - \Delta r, t) &= \Phi(r, t) + \frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, t)(r - \Delta r - r) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(r, t) \frac{(r - \Delta r - r)^2}{2} \\ &\quad + \mathcal{O}((r - \Delta r - r)^3) \end{aligned}$$

et la somme des deux, ensuite divisée par  $(\Delta r)^2$ , donne

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial r^2}(r, t) = \frac{\Phi(r + \Delta r, t) - 2\Phi(r, t) + \Phi(r - \Delta r, t)}{(\Delta r)^2} + \mathcal{O}(\Delta r)$$

(voir par exemple, [Allaire, 2010](#), pp. 13, eq. (1.25)), tandis que par la différence de deux on obtient

$$\frac{\partial \Phi}{\partial r}(r, t) = \frac{\Phi(r + \Delta r, t) - \Phi(r - \Delta r, t)}{2 \Delta r} + \mathcal{O}((\Delta r)^2).$$

Nous effectuons une discrétisation en espace, soit  $j = 0, 1, \dots, N + 1$ , tel que  $j = 0$  correspond à  $r = 0$  et  $j = N + 1$  correspond à  $r = L$  (choix pareil dans [Allaire, 2010](#), pp. 25). Dans ce cas, le pas de discrétisation en espace est  $\Delta r = \frac{L}{N+1}$ . Introduisons les conventions de notation  $\Phi_j(t) \stackrel{\text{not.}}{=} \Phi(j\Delta r, t)$  et  $s_j(t) \stackrel{\text{not.}}{=} s(j\Delta r, t)$ . On ne s'intéresse maintenant qu'aux valeurs  $j = 1, \dots, N$ . Si on fixe  $r = j\Delta r$ , nous allons analyser l'évolution de  $\Phi_j(t) \stackrel{\text{not.}}{=} \Phi(j\Delta r, t)$  dans l'eq. [équation \(2.40a\)](#). Réécrivons [équation \(2.40a\)](#) discrétisé en espace :

$$\boxed{\frac{\partial^2 \Phi_j}{\partial t^2}(t) \approx c^2 \left( \frac{\Phi_{j+1}(t) - 2\Phi_j(t) + \Phi_{j-1}(t)}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{j\Delta r} \frac{\Phi_{j+1}(t) - \Phi_{j-1}(t)}{2\Delta r} \right) + s_j(t)}$$

(2.42)

Pour une valeur de  $j$  fixée, l'[équation \(2.42\)](#) représente une EDO. Pour un ensemble de valeurs de  $j = 1, \dots, N$ , nous retrouvons un système d'EDO. Introduisons des nouvelles conventions de notation :  $\Psi_j(t) \stackrel{\text{not.}}{=} \Psi(j\Delta r, t)$  où  $\Psi_j(t) \triangleq \frac{\partial \Phi_j}{\partial t}(t)$ .

Enfin, le schéma de discrétisation est donné par le système d'EDO à paramètres variables en temps [\(2.43\)](#). Soit, sous la forme développée [\(2.44\)](#) :

$$\dot{\mathbf{x}}_{\text{pp}}(t) = \mathbf{A}_{\text{pp}} \mathbf{x}_{\text{pp}}(t) + \mathbf{S}_{\text{pp}}(t) + \mathbf{T}_{\text{pp}}(t), \quad (2.43a)$$

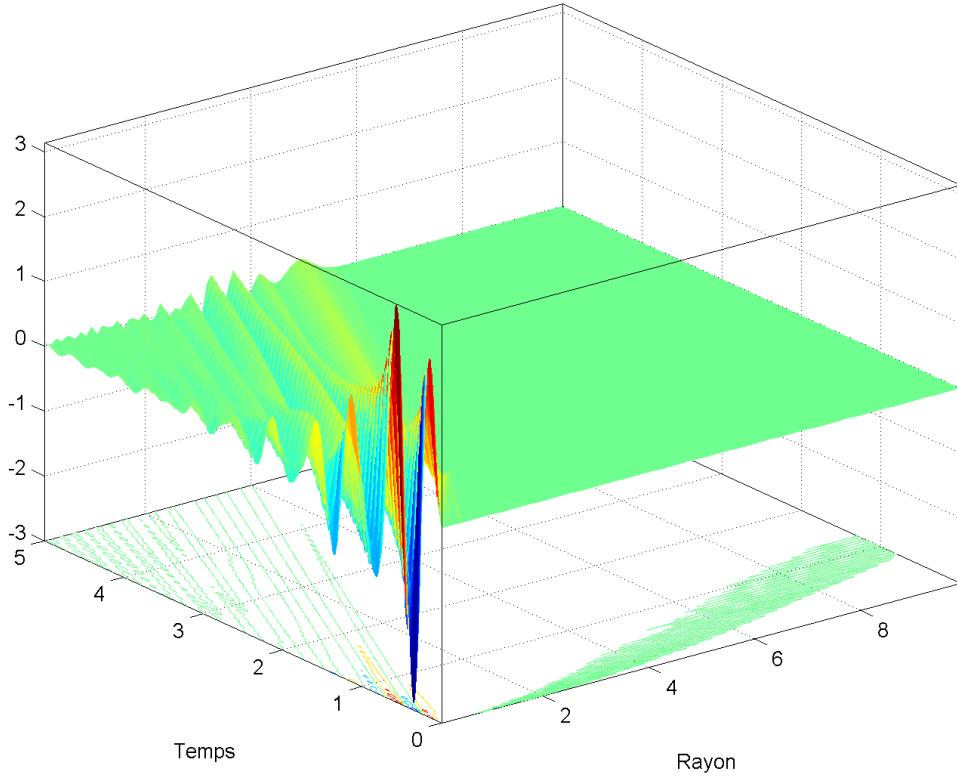
avec la condition initiale

$$\mathbf{x}_{\text{pp}}(t_0) = \begin{bmatrix} \Phi_{t_0}(\Delta r) \\ \Phi_{t_0}(2\Delta r) \\ \Phi_{t_0}(3\Delta r) \\ \vdots \\ \Phi_{t_0}(N\Delta r) \\ - - - \\ \Psi_{t_0}(\Delta r) \\ \Psi_{t_0}(2\Delta r) \\ \Psi_{t_0}(3\Delta r) \\ \vdots \\ \Psi_{t_0}(N\Delta r) \end{bmatrix}, \quad (2.43b)$$

où la matrice constante  $\mathbf{A}_{\text{pp}}$  appartient à  $\mathbb{R}^{2N \times 2N}$ , et les vecteurs qui dépendent du temps  $\mathbf{x}_{\text{pp}}(t)$ ,  $\mathbf{S}_{\text{pp}}(t)$  et  $\mathbf{T}_{\text{pp}}(t)$  sont dans  $\mathbb{R}^{2N}$ .

Dans la [figure 2.18](#) nous avons illustré un cas test pour vérifier le résultat de l'[équation \(2.44\)](#) par des simulation numériques.

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \vdots \\ \Phi_N(t) \\ \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \\ \Psi_3(t) \\ \vdots \\ \Psi_{N-1}(t) \\ \Psi_N(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{not.} \\ \equiv \mathbf{x}_p(t)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 0_{N \times N} & | & \text{Id}_N \\ \hline A_1 & & 0_{N \times N} \end{bmatrix}}_{\substack{\text{not.} \\ \equiv \mathbf{A}_{pp}}} \underbrace{\begin{bmatrix} \Phi_1(t) \\ \vdots \\ \Phi_N(t) \\ \Psi_1(t) \\ \Psi_2(t) \\ \Psi_3(t) \\ \vdots \\ \Psi_{N-1}(t) \\ \Psi_N(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{not.} \\ \equiv \mathbf{x}_{pp}(t)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline s_1(t) \\ s_2(t) \\ s_3(t) \\ \vdots \\ s_{N-1}(t) \\ s_N(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{not.} \\ \equiv \mathbf{s}_{pp}(t)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \hline \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 1}\right) \Phi_0(t) \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot N}\right) \Phi_L(t) \end{bmatrix}}_{\substack{\text{not.} \\ \equiv \mathbf{T}_{pp}(t)}} \\
A_1 \triangleq & \begin{bmatrix} -\frac{2c^2}{(\Delta r)^2} & \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 1}\right) & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 2}\right) & -\frac{2c^2}{(\Delta r)^2} & \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 2}\right) & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot 3}\right) & -\frac{2c^2}{(\Delta r)^2} & \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot 3}\right) & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot (N-1)}\right) & -\frac{2c^2}{(\Delta r)^2} & \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 + \frac{1}{2 \cdot (N-1)}\right) \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \frac{c^2}{(\Delta r)^2} \left(1 - \frac{1}{2 \cdot N}\right) & -\frac{2c^2}{(\Delta r)^2} \end{bmatrix} \quad (2.44)
\end{aligned}$$

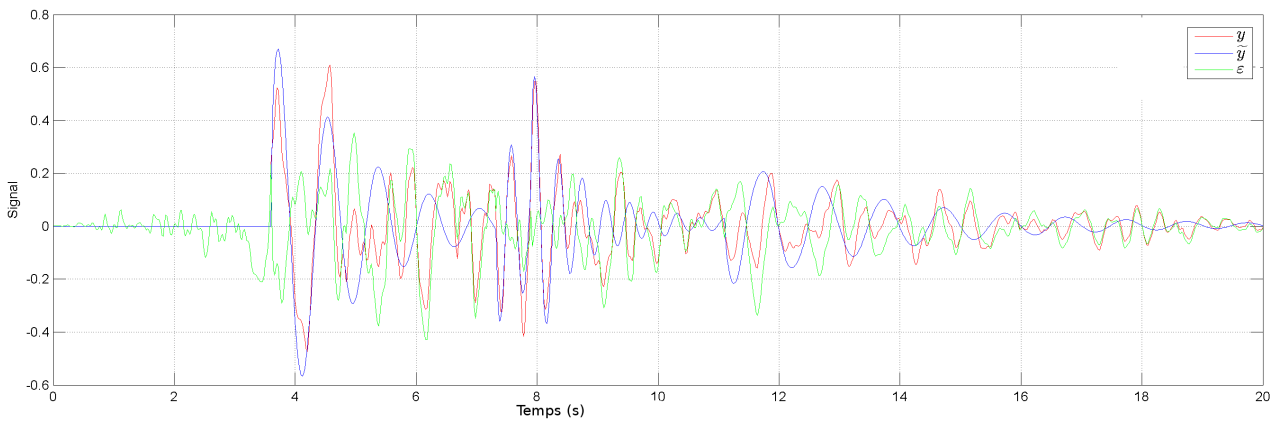


**Figure 2.18** – Évolution de  $\Phi(r, t)$  cf. (2.40) où  $s(r, t) \equiv 0$ ;  $\Phi_{t_0}(r) \equiv 0$ ;  $\Psi_{t_0}(r) \equiv 0$ ;  $\Phi_0(t) = \mathcal{L}_{\Delta r}(0) e^{-\zeta_0 \omega_0 t} \cos \omega_0 \sqrt{1 - \zeta_0^2}$ ;  $\omega_0 = 4\pi$ ;  $\zeta_0 = 0.1$ ;  $\Phi_L(t) \equiv 0$ ;  $L = 10$ ;  $N = 100$ ;  $\Delta r = L/(N + 1)$ ;  $c = 1$ .

**Synthèse de signaux sismiques par la somme de plusieurs termes** Ensuite, nous définissons le signal sismique approché  $\tilde{y}(t)$ , par la somme de plusieurs de ces fonctions de base : nous fixons plusieurs  $r_i$  dans le plan (ou domaine) temps-espace, où  $i$  est un nombre entier supérieur ou égal à 1, et on prend

$$\tilde{y}(t) = \sum_i A_{Shi} \Phi(r_i, t), \quad (2.45)$$

où les paramètres  $A_{Shi} > 0$ . Les divers choix sur les  $r_i$  correspondent à la distance que l'onde met pour arriver au niveau du site : celle-ci peut être une onde directe ou réfléchie.



**Figure 2.19** – Signal sismique réel Kobé  $y(t)$  et son approximation  $\tilde{y}(t)$  cf. (2.45), donnée par la somme de 4 termes;  $\varepsilon(t)$  est l'écart de ces deux courbes

**Discussion et interprétation des résultats** Dans la [figure 2.19](#) le signal sismique Kobé a été approché par la somme de 4 termes. Les paramètres de chaque fonction de base ont été fixés par une procédure d'essais itératifs. L'illustration du signal  $\tilde{y}(t)$  nous fait remarquer les mêmes tendances que pour la classe précédente de fonctions de base : nous arrivons à reproduire les parties fortes, mais pour le reste, il sera nécessaire d'augmenter le nombre des fonctions de base (par exemple, à plusieurs dizaines), situation incompatible avec l'objectif de contrôle.

Nous revenons maintenant à l'axe principal de nos travaux de recherche qui consiste à préparer la synthèse de lois de commande.

### 2.3.4 Prise en compte de modèles de perturbations sur des schémas de contrôle

Une des approches couramment utilisée en automatique pour pouvoir intégrer des informations *a priori* sur les perturbations dans la synthèse de lois de commande, consiste à augmenter le vecteur des variables d'état par des nouvelles variables qui représentent la dynamique interne des perturbations. En d'autres termes, les perturbations représentent les sorties de filtres ou des blocs qui ont des entrées spécifiques. Cette approche est utilisée : (i) pour des modèles stochastiques de perturbations (voir, par exemple les travaux de [Narasimhan, 2004](#)), aussi bien que (ii) pour des modèles déterministes de perturbations. Par la suite, nous nous intéressons à cette seconde possibilité.

Il se trouve que la dynamique des modèles de signaux sismiques présentées dans les [sections 2.3.2](#) et [2.3.3](#) peut être représentée par des systèmes d'EDO. En fait, cette propriété justifie notre choix d'avoir travaillé avec ces classes de fonctions dès le début. La somme d'un nombre fini  $b$  de ces fonctions de base s'écrit comme étant la sortie  $\tilde{y}(t)$  d'un système entrée-sortie, linéaire à paramètres variable en temps :

$$\begin{cases} \dot{x}_p(t) = A_p(t) x_p(t) + U_p(t) \\ \tilde{y}(t) = C_p x_p(t) \end{cases} \quad (2.46)$$

où l'indice « p » dans (2.46), signifie la classe de modèles de perturbations.

$$A_p(t) = \begin{pmatrix} A_{p1}(t) & & & \\ & A_{p2}(t) & & \\ & & A_{p3}(t) & \\ & & & \ddots \\ & & & & A_{pb}(t) \end{pmatrix}, \quad (2.47)$$

$$U_p(t) = \begin{pmatrix} U_{p1}(t) \\ U_{p2}(t) \\ U_{p3}(t) \\ \vdots \\ U_{pb}(t) \end{pmatrix}, \quad C_p = \begin{pmatrix} C_{p1} \\ C_{p2} \\ C_{p3} \\ \vdots \\ C_{pb} \end{pmatrix}', \quad x_p(t) = \begin{pmatrix} x_{p1} \\ x_{p2} \\ x_{p3} \\ \vdots \\ x_{pb} \end{pmatrix}.$$

Le choix des matrices  $A_{pi}(t)$  et des vecteurs  $U_{pi}(t)$ ,  $C_{pi}(t)$  et des conditions initiales  $x_p(t_0)$ , où  $i = 1, \dots, b$ , est fait selon les deux situations :

(i) dans le cas des modèles de la [section 2.3.2](#), il faut prendre

$$A_{pi}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b(t) & a(t) \end{pmatrix}, \quad U_{pi}(t) \equiv 0_{2 \times 1}, \quad C_{pi} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

où

$$a(t) = -2 \frac{t - t_{Sh}}{\sigma^2},$$

$$b(t) = - \left[ \frac{1}{\sigma^2} + (2 \pi \nu_{Sh})^2 + \left( \frac{t - t_{Sh}}{\sigma^2} \right)^2 \right],$$

et les conditions initiales seront fixées par  $x_{pi}(t_0) = \begin{pmatrix} f(t_0) \\ \dot{f}(t_0) \end{pmatrix}$  calculées à partir de [\(2.32c\)](#).

(ii) dans le cas des modèles à base de la dynamique de l'EDP du problème de propagation d'onde présentés dans la [section 2.3.3](#), il faut prendre : (i) chaque  $A_{pi}(t)$  égal à  $\mathbf{A}_{pp}$ , (ii) chaque  $U_{pi}(t)$  est égal à  $\mathbf{S}_{pp}(t) + \mathbf{T}_{pp}(t)$ , et (iii) à partir de [\(2.45\)](#) en choisissant une valeur donnée de  $r_i$ , on peut ensuite construire le vecteur  $C_{pi}$  qui sera composé de zeros partout sauf à la position correspondant à  $r_i$ . Les conditions initiales sont fixées par  $x_{pi}(t_0) = \mathbf{x}_{pp}(t_0)$ . Les formules de  $\mathbf{A}_{pp}$ ,  $\mathbf{S}_{pp}(t)$ ,  $\mathbf{T}_{pp}(t)$  et  $\mathbf{x}_{pp}(t_0)$  se retrouvent dans les [équations \(2.43\)](#) et [\(2.44\)](#).

## 2.4 Synthèse

Dans la perspective d'effectuer la synthèse de lois de commande semi-actives, détaillés dans le [chapitre 3](#), il est nécessaire de choisir astucieusement la représentation du modèle. Non seulement il doit être fidèle aux phénomènes physiques, mais le choix des coordonnées et donc des variables d'état est essentiel pour pouvoir atteindre l'objectif spécifique d'améliorer les spectres de plancher.

Dans la [section 2.1](#) nous avons présenté la classe générale de structures sismiquement isolées au niveau de la base : en suivant une classification schématisée par le [tableau 2.1](#), leurs propriétés modales ont été passées en revue.

En partant de la forme générale [\(2.1\)](#), deux modèles de structures isolées à 2 DDL qui seront utilisées dans le [chapitre 3](#) pour la validation de schémas de contrôle, ont été détaillés. Ces modèles diffèrent par le type d'isolation sismique mis entre la base de la structure isolée et la fondation. Plus précisément, il s'agit de systèmes d'isolation mixte : (i) constitués du même dispositif semi-actif, à savoir un amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable, et (ii) qui diffèrent par les caractéristiques des appuis passifs, principalement par le dispositif fixe (ayant le rôle de dissipation de l'énergie mécanique) qui change d'un modèle à l'autre : pour le premier modèle détaillé dans la [section 2.1.2](#) nous avons utilisé un amortisseur visqueux passif, tandis que ce dernier a été remplacé par un patin à frottement sec dans la [section 2.1.3](#). En d'autres termes, les modèles diffèrent par le terme  $E(\dot{z}_r)$  et la matrice  $C$ , tandis que les autres matrices sont communes, à savoir  $M$ ,  $K$ ,  $C_c(c_A)$ . Pour des raisons de simplification, nous avons considéré comme hypothèses de travail : (i) le mouvement de la structure dans un plan en deux dimensions (2D), (ii) uniquement une composante horizontale de l'excitation et l'on néglige l'effet de la composante verticale des signaux sismiques. Il est à remarquer que la dynamique

de tous ces modèles présentés, peut être exprimée par la forme générale (2.27), qui constitue le cadre général utilisé ensuite dans le chapitre 3, pour l'élaboration de lois de commande. Ces lois de commande seront testées par des simulations numériques sur les deux modèles réduits à 2 DDL, représentations prises directement des tableaux 2.3 et 2.4, et tableaux 2.6 et 2.7, respectivement.

L'intérêt du travail effectué dans la section 2.2 consistait essentiellement à essayer de mettre en évidence des liens possibles entre la DWV et DWVL avec les outils couramment utilisés par les ingénieurs du génie parasismique, par exemple, la transformée de Fourier (TF), le spectre de réponse de l'oscillateur en pseudo-accélération (PSA), la densité spectrale d'énergie (ESD en anglais). L'outil numérique mis au point pendant la première année de thèse, permet d'avoir une représentation graphique compacte de toutes ces informations. L'interprétation des résultats de la DWV à partir des illustrations est difficile (non triviale). Enfin, nous n'avons pas pu identifier un motif<sup>14</sup> pour pouvoir caractériser, par exemple, un certain ensemble de signaux sismiques à partir de ces outils mathématiques.

Dans la section 2.3 trois modèles de signaux sismiques sont proposés :

- (i) la méthode stochastique de génération de signaux présentée dans la section 2.3.1 est un outil ingénieur souvent utilisé dans le laboratoire EMSI. En particulier, elle répond aux demandes en terme de sûreté nucléaire de l'ASN. Pour faire le lien avec la suite de ces travaux de thèse, précisons que celle-ci sera utilisée dans le chapitre 3 pour calibrer et vérifier les schémas de contrôle proposés.
- (ii) deux autres méthodes déterministes pour générer des signaux sismiques ont été présentées dans les sections 2.3.2 et 2.3.3. Elles sont capables de prendre en compte quelques caractéristiques des signaux dont l'amplitude maximale du signal et les fréquences dominantes. L'intérêt par rapport à la suite de ces travaux de thèse est que ces modèles peuvent être exprimés par des systèmes d'EDO ce qui facilitera leur intégration dans des schémas de contrôle.

Une partie du travail effectué dans la section 2.3.2 a consisté à essayer d'approcher un signal sismique donné par la somme de plusieurs fonctions de base, à partir d'un algorithme numérique d'optimisation. Afin de pouvoir s'appropriier au mieux la DWV, une première mise en œuvre de ces techniques a été réalisée utilisant comme fonction critère (2.34) pour la minimisation numérique. Ce travail nous a fait découvrir la non convexité de ces fonctions : on verra dans le chapitre 3 à la section 3.2.3 que cette propriété constitue une difficulté technique qui s'avère difficile à être surmontée, pour la résolution de problèmes de contrôle.

---

14. en anglais : pattern

# Chapitre 3

## Synthèse de commandes

L'objectif de ce chapitre est de proposer une solution au problème de contrôle qui a été formalisé dans la [section 1.3.2](#).

### 3.1 Contrôle actif

**Le point de départ de ces travaux de recherche.** L'article [Kelly et al., 1987](#), est un des premiers travaux de recherche théorique qui porte sur l'étude de systèmes d'isolation mixte CP + CA. La problématique traitée par le mécanicien Kelly (actuellement très connu dans le domaine du génie parasismique pour ses livres dont [Kelly, 1997](#), [Naeim et Kelly, 1999](#), et de nombreux articles), et par l'automaticien Leitmann (connu pour un type de loi de commande qui porte son nom, [Leitmann, 1979](#)), dans l'article [Kelly et al., 1987](#), était de savoir s'il est possible d'améliorer le comportement des bâtiments isolés au niveau de la base par des moyens de contrôle actif. Naturellement, la réponse est oui. Il est à signaler que le cadre de ces travaux de thèse diffère de celui des études de [Kelly et al., 1987](#), et ce pour deux raisons :

- nous considérons un problème de contrôle *semi-actif*, et
- pour évaluer le comportement des structures isolées (et donc le système en boucle fermée), nous utilisons le *spectre de plancher* comme fonction critère (ou d'évaluation).

Tout d'abord, la commande figurant dans [Kelly et al., 1987](#), a été étudiée pour savoir si elle répond à la spécification en performance de la [section 1.3.2](#).

#### 3.1.1 Un résultat qui surprend

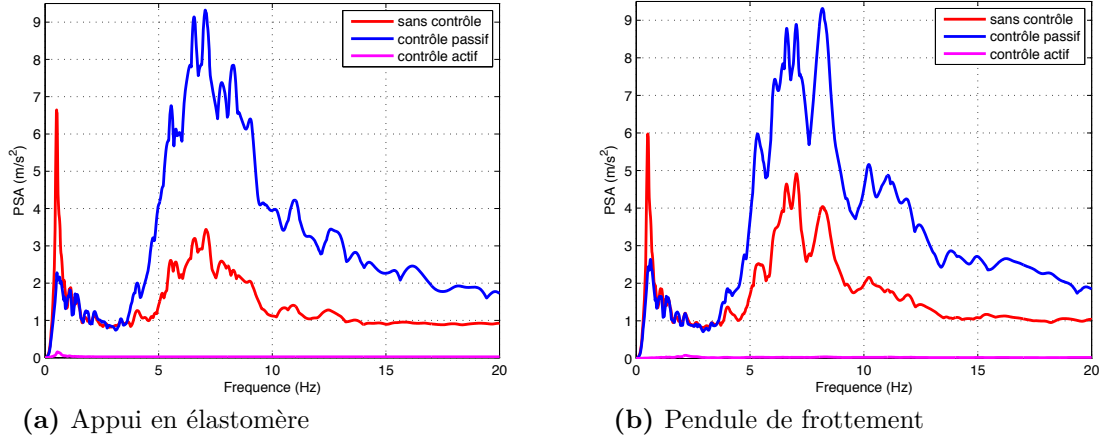
La réponse à cette dernière interrogation est plutôt positive au vu de l'application de cette commande active aux deux modèles de structures isolées à 2 DDL présentés dans les [sections 2.1.2](#) et [2.1.3](#). Les résultats de simulation illustrés dans la [figure 3.1](#) sont remarquables : l'ordre de grandeur de la courbe violette correspondant au CA est plus faible que pour les deux autres courbes. De plus, l'amplification autour de la deuxième fréquence propre de la structure a disparu pour faire place à un plateau quasi-plat. En contrepartie, il est à noter que ce type de loi de commande :

- correspond physiquement à une force active,
- et est certes borné en norme euclidienne, mais la valeur de cette borne est *très grande*.

Ces points seront détaillés plus loin.



En reprenant et complétant les explications de la [section 1.3.1](#), présentons le scénario de simulations qui vont accompagner les développements de ce chapitre.



**Figure 3.1** – Spectres de plancher au niveau de la base pour une structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d’appuis parasismiques et sa réponse au signal sismique artificiel n° 1

**Scénario de simulations.** Pour rappel, la [figure 1.4](#) a été utilisée afin de pouvoir introduire et formaliser le problème de contrôle traité dans cette thèse. Les courbes bleue et rouge (reprises dans la [figure 3.1](#)) seront utilisées en tant qu’indicateurs qualitatifs de performance. En partant de la [figure 3.1a](#) précisons le sens qu’on associe à ces courbes :

- la **courbe bleue** représente la réponse de la structure isolée sans contrôle (*i.e.*  $c_A(t) \equiv 0$ ), où la partie passive a été augmentée par un dispositif passif additionnel ayant une capacité importante de dissipation d’énergie sismique : cette solution appelée « contrôle passif » a l’avantage de réduire considérablement les déplacements relatifs au niveau de la base, mais en revanche, elle a l’inconvénient d’exciter de façon importante les fréquences non isolées. C’est pourquoi, si on n’est pas capable de proposer des lois de commande pour lesquels le spectre de plancher se situe en dessous de la courbe bleue, notamment autour de la seconde fréquence propre de vibration de la structure, alors il n’y a pas d’intérêt pratique à utiliser ces nouvelles solutions. En d’autres termes, il faudra faire « mieux » que les dispositifs passifs qui sont actuellement utilisés dans l’industrie (voir l’Introduction dans la [section 1.1](#)) pour justifier l’apport de solutions plus sophistiquées (et coûteuses) de type AC ou CSA.
- la **courbe rouge** représente la réponse libre de la structure isolée sans contrôle (*i.e.*  $c_A \equiv 0$ ), et sans aucun dispositif passif additionnel. Le premier pic traduit un grand déplacement relatif de la base ce qui constitue un inconvénient. En revanche on retrouve un niveau plus faible autour de la seconde fréquence propre de vibration de la structure par rapport à la courbe bleue, ce qui constitue un avantage. En d’autres termes, les dispositifs passifs qui dissipent peu d’énergie ont la tendance de filtrer mieux la réponse de la structure autour des fréquences non isolées au détriment de larges mouvements relatifs de la base.

Les mêmes arguments s’appliquent pour les courbes rouge et bleue dans la deuxième configuration de structure à 2 DDL isolée au niveau de la base analysée dans la [figure 3.1b](#).

**Que veut dire une amélioration d'un spectre de plancher ?** On conviendra qu'une loi de commande proposée *améliore* le spectre de plancher si les deux conditions suivantes sont valables simultanément :

- la valeur du premier pic est proche de (voire inférieure à) celle de la courbe bleue,
- et si la valeur du second pic (autour de la seconde fréquence propre de vibration) est proche de (voire inférieure à) celle de la courbe rouge.

En règle générale, les résultats sont d'autant meilleurs que les valeurs sur toute la longueur du spectre de plancher soient faibles.

Il est clair que le concept d'amélioration que nous avons introduit est assez modeste par rapport aux résultats du « contrôle actif » de la [figure 3.1](#). Pourtant, il est à signaler que le problème que nous avons formalisé dans la [section 1.3.2](#) est un problème de contrôle semi-actif, et, en anticipant sur la suite de ce chapitre, on verra que ce cadre permet d'illustrer l'apport de CSA par rapport au CP.

Au vu de la performance de cette solution de CA de type Leitmann, reste à savoir si, en adaptant ce type de loi de commande à la résolution du problème de contrôle semi-actif présenté dans la [section 1.3.3](#), il est possible de retrouver le même niveau de performance. Répondre à cette question est l'objet des travaux ci-après.

### 3.1.2 Loi de commande active de Leitmann

Ses nombreuses publications et travaux de recherche montrent que G. Leitmann a été un automaticien très actif pendant une période de presque vingt ans : voir par exemple [Leitmann, 1979](#), et [Leitmann et Reithmeier, 1995](#). En particulier, il a travaillé sur un type de loi de commande que nous appelons « commande de Leitmann » dans ce mémoire, solution qu'on peut comparer aux commandes par modes glissants. Ces deux types de lois de commande sont classées dans la famille *Variable Structure Systems* (VSS), [DeCarlo et al., 1988](#).

**Les points forts et propriétés des systèmes asservis en boucle fermée.** De façon synthétique, la commande proposée dans [Kelly et al., 1987](#), [Corless et Leitmann, 1981](#), [Leitmann, 1979](#), [Gutman, 1979](#), [Gutman et Leitmann, 1976](#), permet, sous réserve que les perturbations et les incertitudes sur le modèle soient bornées en norme euclidienne, et respectent les conditions dites de *matching*, de

- (A) soit dominer les effets cumulés des perturbations et incertitudes et assurer que l'origine du système est uniformément globalement asymptotiquement stable (UGAS), [Corless et Leitmann, 1981](#), [Corless et Leitmann, 1981](#) ; dans ce cas la loi de commande se présente sous forme discontinue ;
- (B) soit vérifier deux propriétés moins restrictives que UGAS, à savoir *uniform boundedness* et *uniform ultimate boundedness* dans le cas où une régularisation de la loi de commande est appliquée dans un  $\varepsilon$ -voisinage autour de l'hypersurface responsable de la discontinuité dans le cas précédent. Cette fois-ci, la loi de commande est continue, et le phénomène de « chattering » présent dans le cas antérieur est évité. Cette loi de commande a été utilisée dans l'article de [Kelly et al., 1987](#).

Un résultat que nous n'avons pas trouvé dans la littérature associée à la loi de commande de Leitmann est un théorème d'optimalité par rapport à une fonction critère qui reste à définir. D'où notre contribution suivante.

**Un théorème de contrôle optimal non linéaire.** La première partie du théorème suivant est un rappel sur le résultat fondamental de Leitmann correspondant

à la situation notée précédemment (A). La raison pour laquelle nous avons présenté d'abord la propriété de UGAS est que ce premier résultat est utilisé pour la preuve du second résultat sur l'optimalité, qui constitue la seconde partie de ce théorème. C'est dans cette seconde partie que réside notre contribution.

### **Théorème 3.1 (*Stabilité et optimalité*)**

On considère le système suivant

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(u + \delta(t, x, u)), \quad x(0) = x_0, \quad (3.1)$$

pour lequel l'état  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , la commande  $u(t) \in \mathbb{R}^m$ . La fonction  $\delta : \mathbb{R}_{\geq 0} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \rightarrow \mathcal{D}$  regroupe les diverses simplifications de modèle et incertitudes; elle est inconnue mais supposée bornée :  $\|\delta(t, x(t), u(t))\| \leq \delta^{\max}$  par une constante  $\delta^{\max}$  connue. Les fonctions  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  et  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n \times m}$  sont supposées continues et connues. L'ensemble  $\mathcal{D}$  est supposé être un domaine compact de  $\mathbb{R}^n$ .

S'il existe une fonction,  $V(x)$ , de classe  $\mathcal{C}^1$  définie-positive telle que l'origine  $x = 0$  soit uniformément globalement asymptotiquement stable (UGAS) pour le système nominal non contrôlé (i.e.,  $\delta(t, x, u) \equiv 0$ , et  $u \equiv 0$ ) alors la commande

$$u(x) = \begin{cases} -\frac{(L_g V(x))'}{\|L_g V(x)\|} \rho(x), & L_g V(x) \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.2)$$

garantit la stabilité UGAS du point d'équilibre  $x = 0$  pour le système incertain si la fonction  $\rho(x)$  est librement choisie sous la condition qu'elle reste minorée par  $\delta^{\max}$ .

Soit  $l(x, \delta)$ , calculé par l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman :

$$l(x, \delta) = -L_f V(x) + \frac{1}{2} \|L_g V(x)\| \rho(x) - L_g V(x) \delta. \quad (3.3)$$

alors la commande  $u$  de l'équation (3.2) est optimale, dans le sens où elle minimise le critère

$$J = \int_0^\infty l(x, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} u' u dt. \quad (3.4)$$

La notation  $L_g V(x)$  correspond à la dérivée de Lie de la fonction  $V$  le long (i.e., dans la direction) du champ vectoriel  $g$  évalué au point  $x$ , Khalil, 2002, §13.2. La preuve du théorème 3.1 figure à la section 3.3. En ce qui concerne notre contribution sur l'optimalité, la preuve a été largement inspirée de Sepulchre et al., 1997, Thm. 3.19.

Contrairement à Sepulchre et al., 1997, Thm. 3.19, où un autre type de loi de commande appelée *damping control* a été utilisée, nous avons utilisée ici la version discontinue par rapport à  $x$  de la loi de Leitmann. Il est à signaler que, au cas où une des versions régularisantes et continues par rapport à  $x$  de la loi de Leitmann est utilisée, les deux propriétés (UGAS et l'optimalité) sont perdues.

**Suggestion d'applicabilité sur notre problème de contrôle semi-actif.** Nous avons déjà évoqué dans l'état de l'art de la section 1.5.5, la solution très

répandue intitulée *clipped-optimal* LQR qui est constituée de deux étapes : (i) calcul d'une loi de commande active optimale par rapport à une fonction critère quadratique, en vue de sa (ii) utilisation comme référence lors de la seconde étape qui consiste à essayer de l'approcher, au mieux, par les moyens des actionneurs physiques dont on dispose. Politopoulos et Pham, 2011, Pham, 2010, ont utilisé cette procédure dans leurs travaux avec la particularité que la fonction coût définie en termes d'énergies modales de vibration leur permettait d'améliorer les spectres de plancher. En d'autres termes, ce sont les fonctions coût quadratiques qui ont permis aux auteurs d'atteindre l'objectif du contrôle. D'où notre suggestion d'appliquer la même stratégie lors de la première étape à partir de fonctions coût de l'équation (3.4). Cette piste ne sera pas poursuivie pour la raison suivante : nous avons choisi de chercher des méthodes de synthèse de lois de commande capables de calculer directement la variable de contrôle souhaitée (par exemple dans notre cas c'est le coefficient d'amortissement  $c_A$ ), c'est-à-dire dans une seule étape comme il a été formalisé dans la section 1.3.2.

## Les points à améliorer en vue de la résolution du problème de contrôle semi-actif

Il se trouve que le cadre du théorème 3.1 est trop restrictif pour pouvoir adresser les problèmes de contrôle semi-actif. Par la suite, nous allons nuancer trois limitations pour en proposer des modifications.

L'interprétation géométrique de la commande active de Leitmann équation (3.2) est la suivante :  $u$  représente le produit d'un vecteur unitaire par une fonction scalaire  $\rho(x)$  qui spécifie la longueur<sup>1</sup> (*i.e.* la norme euclidienne) du vecteur  $u$ . On observe que le vecteur unitaire est construit à partir du vecteur  $(L_g V(x))'$ , ce dernier indiquant la direction dans l'espace des variables d'état du vecteur  $u$ . Il est à noter que, pour garantir les deux propriétés du théorème 3.1, nous avons besoin de lois de commande suffisamment fortes au sens où la longueur  $\rho(x)$  doit respecter la condition  $\rho(x) > \rho^{\min}$ , où  $\rho^{\min}$  est une borne inférieure. Mais, il est possible que l'actionneur semi-actif ne soit pas capable de reproduire ces fortes valeurs de la loi de commande. En d'autres termes, il se peut qu'en pratique, le cadre original de Leitmann demande des moyens d'action qui ne soient pas physiquement réalisables. En particulier, contrairement au cas actif, pour le problème semi-actif défini dans la section 1.3.2 nous avons plutôt besoin d'une loi de commande ayant une borne supérieure *a priori* imposée par l'utilisateur,  $c_A(t) \leq c_A^{\max}$ .

Deuxièmement, les *matching conditions* sont assez restrictives vu notre problème. En particulier, le système d'EDO en coordonnées physiques absolues qui décrit la dynamique des modèles de structures isolées au niveau de la base (voir la section 2.1) respectent les *matching conditions*, tandis que en coordonnées physiques relatives, généralisées ou modales ce n'est plus vrai. Nous aimerions avoir la flexibilité de travailler avec toutes ces classes de systèmes et donc enlever ce type d'hypothèse de travail. En d'autres termes, nous cherchons un cadre plus général que celui offert par les *matching conditions*.

Un troisième point est que, pour des raisons de nature pratique, nous souhaitons travailler avec des lois de commande continues. La régularisation habituelle de la

---

1. en anglais : magnitude

loi de commande de Leitmann utilisée dans l'article [Kelly et al., 1987](#), constitue un bon candidat.

Enfin, tous ces demandes (ou limitations, ou inconvénients par rapport aux besoins des problèmes de contrôle semi-actif) qui ont été formulées plus haut font que dans ce nouveau cadre on perd les propriétés de UGAS et d'optimalité formulées dans le [théorème 3.1](#), pour faire place à des propriétés moins fortes comme celles de *uniform boundedness* et *uniform ultimate boundedness*. De plus, le même cadre mathématique permet d'étudier d'autres propriétés dont une qui prend en compte les spectres de plancher. Tous ces arguments nous ont conduit aux résultats de la section suivante.

## 3.2 Contrôle semi-actif

### 3.2.1 Contrôle semi-actif de type Leitmann

Nos contributions qui seront présentées dans cette section consistent à :

- adapter le théorème de Leitmann pour pouvoir résoudre des problèmes de contrôle *semi-actif*,
- vérifier que dans cette nouvelle situation on retrouve les propriétés de *uniform boundedness* et *uniform ultimate boundedness*,
- calculer explicitement des indicateurs de performance en boucle fermée, dont une borne supérieure (*i.e.* une enveloppe) sur le spectre de plancher : son allure dépend des paramètres choisis de la loi de commande

On peut mentionner d'autres contributions par rapport à la majorité des travaux de la littérature du génie parasismique :

- dans notre travail nous proposons de tenir compte des caractéristiques du dispositif semi-actif et les intégrer dès le début, dans la phase de synthèse de loi de commande, afin de pouvoir construire un schéma de contrôle à une seule étape. En d'autres termes, au lieu de choisir l'utilisation des solutions de type *clipped* (voir la [section 1.5.5](#)) pour résoudre des problèmes de contrôle semi-actif et qui, pour rappel, sont constituées de deux étapes afin d'arriver au calcul des variables internes de l'actionneur semi-actif, nous proposons d'utiliser une seule étape pour ainsi calculer directement ces variables internes en les traitant comme lois de commande. Un exemple pour ces dernières est l'amortissement variable  $c_A(t)$ . Cette approche n'est pas nouvelle dans la littérature du contrôle de structures, voir les articles de [Leitmann, 1994](#), [Leitmann et Reithmeier, 1995](#). Une fois de plus, on se place dans la continuité des travaux de Leitmann.
- nous aimerions tenir compte de l'existence des incertitudes de modèle et des perturbations dès la phase de synthèse de lois de commande. Les propriétés en boucle fermée, devront tenir compte de ces informations. En d'autres termes, contrairement à beaucoup de schémas de contrôle utilisées dans la littérature, dans notre travail nous cherchons à éviter de négliger dans un premier temps l'existence des incertitudes sur le modèle de la structure isolée et de la perturbation (assimilée au signal sismique), pour revenir *a posteriori* avec une analyse de robustesse, qui aura comme objectif d'essayer de quantifier l'influence de ces informations omises.
- nous n'utilisons pas l'hypothèse que la perturbation soit un bruit blanc (par exemple, voir la méthode LQR, [Soong, 1990](#), pp. 36), ou un bruit coloré (par

exemple, obtenu en filtrant un bruit blanc par un filtre linéaire de second ordre, de type Kanaï–Tajimi, [Narasimhan, 2004](#)). La seule hypothèse que nous utilisons est la connaissance de la valeur maximale de l'accélération du sol  $\ddot{x}_g^{\max}$ , *i.e.* la PGA. Prédire ce paramètre sismique est une hypothèse raisonnable au vu des avancées de la sismologie.

La structure de cette section est la suivante : dans un premier temps, nous allons formuler dans un contexte général un théorème de contrôle robuste non linéaire qu'on peut situer dans la continuité des travaux en automatique de Leitmann et de ses collaborateurs. On remarquera que, en particulier, ce théorème peut être appliqué pour résoudre des problèmes de contrôle semi-actif rencontrés dans les disciplines de génie parasismique et contrôle de structures. C'est pourquoi, dans un deuxième temps, nous allons l'utiliser au problème formalisé dans la [section 1.3.2](#) et construire deux corollaires portant sur une borne (*i.e.* une enveloppe) sur le spectre de plancher. Ces résultats sont trop conservatifs (*i.e.* prudents) ce qui empêche leur utilisation immédiate en pratique par l'ingénieur. Dans un troisième temps, une étude sur le choix des variables d'état et les paramètres de la loi de commande semi-active sera effectuée afin d'atteindre l'objectif d'améliorer les spectres de plancher.

### **Théorème 3.2 (Un théorème de contrôle robuste non linéaire)**

On considère un système de la forme

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t)) x + f(x, \nu) + (B(x) + \Delta B(t, x, \nu)) c_A(t) + D \nu(t), \quad (3.5)$$

où  $x(t)$ ,  $c_A(t)$ , et  $\nu(t)$  sont, respectivement, les vecteurs d'état, de commandes et de perturbations, de dimensions respectives  $n$ ,  $m$  et  $l$ . Les matrices  $A$  et  $D$  sont constantes et leurs valeurs numériques sont supposées connues ;  $B$  est une fonction continue de  $x$  dont on connaît l'expression. Les matrices  $\Delta A$  et  $\Delta B$  représentent des incertitudes et sont ainsi supposées inconnues.

Sous les conditions suivantes

- (i) les fonctions  $\Delta A$  et  $\Delta B$  sont supposées continues et bornées :  $\|\Delta A(t)\| \leq \Delta A^{\max}$  et  $\|\Delta B(t)\| \leq \Delta B^{\max}$  de même que  $f$  et  $\nu$  :  $\|f(x, \nu)\| \leq f^{\max}$  et  $\|\nu(t)\| \leq \nu^{\max}$  ;
- (ii) la matrice  $A$  est Hurwitz c'est-à-dire, pour toute matrice symétrique définie-positive  $Q$  il en existe une autre,  $P$ , symétrique définie-positive et telles que  $P A + A' P = -Q$ . On suppose de plus  $\Delta A^{\max} < \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)/2$ ,

la commande

$$c_A(x) = \begin{cases} \max \left( 0_{m \times 1}, -\frac{B(x)' P x}{\|B(x)' P x\|} \right) \rho(x), & \text{si } \|B(x)' P x\| \geq \varepsilon \\ \max \left( 0_{m \times 1}, -\frac{B(x)' P x}{\varepsilon} \right) \rho(x), & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.6)$$

dans laquelle  $\varepsilon > 0$ , et  $\rho$  est une fonction arbitraire continue, positive et bornée ( $0 \leq \rho(x) \leq \rho^{\max}$ ), garantit :

P1 : toutes les trajectoires  $x(t)$  sont bornées,

P2 : pour toute condition initiale  $x(t_0)$  satisfaisant  $\|x(t_0)\| \geq b$ , et pour tout  $b > b_0$  les trajectoires  $x(t)$  entrent dans la boule de rayon  $b$  en un temps au



plus égal à

$$T = \frac{\ln \left( \frac{\sqrt{x_0' P x_0} - \sqrt{\lambda_{\min}(P) b_0}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P) (b - b_0)}} \right)}{\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} - \Delta A^{\max}} + t_0, \quad (3.7)$$

à une vitesse au moins égale à

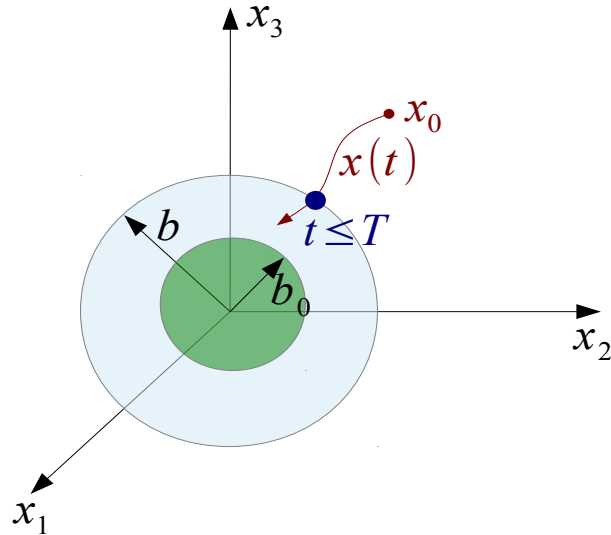
$$d_1 = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} - \Delta A^{\max}. \quad (3.8)$$

La constante  $b_0$  est donnée par

$$b_0 = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \frac{f^{\max} + \Delta B^{\max} \rho^{\max} + \|D\| \nu^{\max}}{\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} - \Delta A^{\max}}. \quad (3.9)$$

La vitesse de convergence invoquée ici est précisée au cours de la preuve de ce théorème, qui, du fait de sa longueur, est donnée à la [section 3.4](#). Dans notre travail d'adaptation et passage de la loi de commande du [théorème 3.1](#) vers celle du [théorème 3.2](#) nous avons choisi (de façon habituelle en automatique) des fonctions  $V(x) = x' P x$ .

**Interprétation du [théorème 3.2](#), mode d'emploi et point de vue de l'ingénieur.** Derrière [P1] se trouve la propriété de *uniform boundedness*. Les détails techniques ont été mis dans la preuve située dans la [section 3.4](#). Son mode d'emploi est très proche de la propriété [P2] à laquelle nous allons nous intéresser par la suite.



**Figure 3.2** – Illustration de la propriété [P2] du [théorème 3.2](#), propriété qui repose sur *uniform ultimate boundedness*

Une façon de présenter [P2] est de partir de la [figure 3.2](#) et se placer dans l'espace des variables d'état. L'utilisateur choisit une *précision* définie par une boule de

rayon  $b$  (sauf mention contraire, les boules dont on parle ici sont centrées à l'origine) sachant que celle-ci est limitée en taille par la boule de rayon  $b_0$ . Alors, toutes les trajectoires du système en boucle fermée (qu'elles soient uniques ou pas) qui ont des conditions initiales à l'extérieur de la boule de rayon  $b$ , convergent vers la boule de rayon  $b$  et se retrouveront à l'intérieur de celle-ci dans un temps fini, inférieur ou égal à  $T$ . Les formules de  $b_0$  et  $T$  qui se trouvent dans les équations (3.7) et (3.9), respectivement, font intervenir la matrice  $P$  qui est un des paramètres de la loi de commande.

Le mode d'emploi du théorème 3.2 est de partir des formules de  $b_0$  et  $T$ , et de chercher les paramètres  $(P, Q)$  tel que,

- $b_0$  soit le plus faible possible (la traduction sur notre application de cette condition est que nous aimerions réduire au maximum le mouvement de la structure, quelque soit le signal sismique) ;
- $b_0$  et  $T$  soient les plus faibles possible : chercher donc une solution de compromis entre la taille de la boule de rayon  $b_0$  et le temps de convergence vers la boule de rayon  $b$ .

Ces conditions conduisent naturellement à la formulation de problèmes d'optimisation. Signalons qu'il est difficile de formuler une solution explicite à cause de la nature assez complexe des opérations qui apparaissent dans  $b_0$  et  $T$ , notamment savoir comment manipuler le triplet  $(\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(Q))$  reste une question ouverte.

En revanche, en partant du résultat de l'article de Patel et Toda, 1980, on sait que la solution du problème

$$\min_Q \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(Q)}$$

est constituée des matrices s'écrivant sous la forme  $Q = \alpha 1_{2n \times 1}$ , ou  $\alpha > 0$ . Ce résultat est repris dans d'autres ouvrages en automatique dont Khalil, 1996, Ex. 5.1, pp. 250, Khalil, 2002, Ex. 9.1, pp. 372, Hedrick et Girard, 2005, pp. 99. Nous pouvons l'appliquer au théorème 3.2 de plusieurs façons :

- parmi les hypothèses du théorème 3.2, celle sur  $\Delta A^{\max}$  est une condition typique de stabilité robuste<sup>2</sup>, Weinmann, 1991, pp. 204, Khalil, 2002, Ex. 9.1, pp. 342. Dans ce cas, pour renforcer la robustesse du schéma de contrôle, l'utilisateur peut demander que cette borne soit la plus grande possible.
- l'utilisateur peut demander que la vitesse de convergence  $d_1$  dans équation (3.8) soit la plus grande par rapport à son premier terme.

Précisons que le choix particulier  $Q = 1_{2n \times 1}$  a été effectué dans l'article de Kelly et al., 1987, pourtant les auteurs n'ont pas apporté de justification à ce choix.

Du point de vue de l'application du contrôle semi-actif formulée dans la section 1.3.2, l'inconvénient de cette approche consistant à s'intéresser au binôme  $(\lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(Q))$  est qu'il est difficile de voir le lien avec les spectres de plancher. De plus, nous aurons probablement besoin d'une flexibilité plus grande dans le choix de la matrice  $Q$  afin de pouvoir répondre à l'objectif d'améliorer les spectres de plancher.

Ce type de loi de commande a comme effet le renforcement du mécanisme de dissipation d'énergie au sens des fonctions  $V(x)$  :

- (i) on peut montrer que la quantité<sup>3</sup>  $-\dot{V}(x)/V(x)$  de la boucle fermée est supé-

2. en anglais : robust stability

3. appelée en anglais : transient decay rate, Liu et Chen, 1993, Pujol et al., 2009, pp. 589



rieure ou égale à celle calculée au cas de la boucle ouverte quelque soit  $x$ , à condition que  $\Delta B(t, x, \nu) \equiv 0$ . Ceci traduit une vitesse de décroissance des trajectoires du système supérieure au cas où l'on utilise l'actionneur semi-actif.

- (ii) la commande est choisie pour obtenir un effort maximal et un temps de réponse minimal<sup>4</sup> sur le système nominal (c'est-à-dire sans perturbations et sans incertitudes).

Pour l'ingénieur ce résultat peut s'avérer intéressant si la dissipation est focalisée sur l'énergie modale de chaque mode de vibration, qui aura comme conséquence la réduction des pics sur les spectres de plancher.

**Corollaires qui portent sur le spectre de plancher.** Nous allons appliquer le [théorème 3.2](#) au modèle réduit de la structure isolée à  $n$  DDL écrit en coordonnées relatives (2.1), où nous supposons que la partie passive du système d'isolation mixte est constituée d'un amortisseur  $c_b$ , d'une raideur  $k_b$  et d'un patin à frottement sec de coefficient  $\mu$ . Il est à noter que le résultat des deux corollaires qui suivront couvre les deux situations particulières des modèles à 2 DDL présentées dans la [section 2.1.2](#) (à condition de fixer  $\mu F_N = 0$ ) et la [section 2.1.3](#) (à condition de fixer  $c_s = 0$ ), respectivement.

**Corollaire 3.3 (*Borne uniforme sur le spectre de plancher*)**

*Le spectre de plancher en pseudo-accélération évalué au niveau de la base d'une structure à  $n$  degrés de liberté, sans incertitudes, qui est protégée contre les séismes par un système d'isolation mixte composée pour la partie passive d'une raideur, un amortisseur fixe et un patin à frottement sec, et pour la partie semi-active d'un amortisseur à coefficient d'amortissement variable, est majoré par*

$$PSA_\zeta(\omega) \leq \frac{1}{m_b} \frac{1}{\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \left( \mu F_N + \|v_1\| \max \left( \sqrt{\frac{x(t_0)' P x(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}}, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \mu_0 \right) \right) \quad (3.10)$$

où

$$v_1 = \begin{pmatrix} -(k_b + k_s) \\ k_s \\ -(c_b + c_s + c_A^{\max}) \\ c_s \end{pmatrix}, \quad \mu_0 = \frac{\frac{\mu F_N}{m_b} + \sqrt{n} \ddot{x}_g^{\max}}{\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}}, \quad (3.11)$$

$$\ddot{x}_g^{\max} = \max_{t \geq t_0} |\ddot{x}_g(t)|,$$

et  $x(t) = \begin{pmatrix} z_r(t) \\ \dot{z}_r(t) \end{pmatrix}$  représente ici le vecteur des coordonnées physiques relatives.

La preuve se trouve dans la [section 3.5](#) et utilise les mêmes techniques que celles de la preuve du [théorème 3.2](#).

Le résultat du [corollaire 3.3](#) porte sur une borne uniforme du spectre de plancher en pseudo-accélération qui fait intervenir les paramètres de la loi de commande.

4. an anglais : maximal effort, minimum time response, [Brogan, 1991](#), Ex. 10.7, pp. 363

En ce qui concerne son utilisation, on se retrouve dans la même situation analysée pour le cas de la propriété [P2] du [théorème 3.2](#) où il faut optimiser le choix de  $P$  à partir du triplet  $(\lambda_{\min}(P), \lambda_{\max}(P), \lambda_{\min}(Q))$ . Il est difficile d'avancer dans cette direction par la voie théorique.

En pratique, le [corollaire 3.3](#) n'apporte pas le meilleur résultat souhaité. Il manque d'une certaine finesse associée aux spécificités du spectre de plancher. En fait, la variable  $\omega$  n'apparaît pas du tout dans (3.10). D'où l'intérêt du travail présenté ci-après.

**Corollaire 3.4 (*Borne non uniforme sur le spectre de plancher*)**

*Le spectre de plancher en pseudo-accélération évalué au niveau de la base du même modèle de structure utilisée auparavant dans le [corollaire 3.3](#) est majoré par*

$$PSA_{\zeta}(\omega) \leq \frac{\omega}{\sqrt{1-\zeta^2}} \gamma^2 \max_{t \geq t_0} \int_{t_0}^t |\ddot{x}_g(\tau)|^2 d\tau, \quad (3.12)$$

*sous les conditions suivantes :*

- (i) *le système est à condition initiale nulle,*
- (ii)  *$\gamma > 0$  est arbitrairement choisi par l'utilisateur en respectant la condition*

$$\gamma^2 > \frac{(\lambda_{\max}(P))^2}{\lambda_{\min}(Q)} n, \quad (3.13)$$

- (iii) *les trajectoires du système écrit en coordonnées relatives  $x(t) = \begin{pmatrix} z_r(t) \\ \dot{z}_r(t) \end{pmatrix}$  appartiennent à l'ensemble*

$$S_x = \left\{ x : \|x\| > \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}, \quad (3.14)$$

*où*

$$\begin{aligned} \Delta &= b^2 - 4ac, \\ a &= \frac{1}{\gamma^2} (\lambda_{\max}(P))^2 n - \lambda_{\min}(Q), \\ b &= 2 \lambda_{\max}(P) \frac{\mu F_N}{m_b} + \frac{1}{m_b} \|v_1\|, \\ c &= \frac{\mu F_N}{m_b}. \end{aligned}$$

En particulier, il est à noter que la relation (3.13) est équivalente à  $a < 0$ , d'où  $\Delta \geq b^2$  et donc  $-b - \sqrt{\Delta} < 0$ , ce qui garantit la positivité du rayon qui définit  $S_x$  dans (3.14). On observe que, par construction, pour notre problème  $b$  est strictement positif et  $c$  est positif. La preuve se trouve dans la [section 3.6](#) et utilise un résultat plus général de [Isidori, 1995](#), Prop. 9.5.1, pp. 452.

Le résultat du [corollaire 3.4](#) renseigne sur l'existence d'une borne linéaire en  $\omega$  du spectre de plancher. Une façon de l'interpréter est de dire qu'avec ce type de loi de commande nous sommes capables de garantir une meilleure atténuation pour les basses fréquences. Du point de vue de son utilisation, la relation (3.12) donne la possibilité à l'utilisateur de choisir convenablement le paramètre  $\gamma$ , à condition de

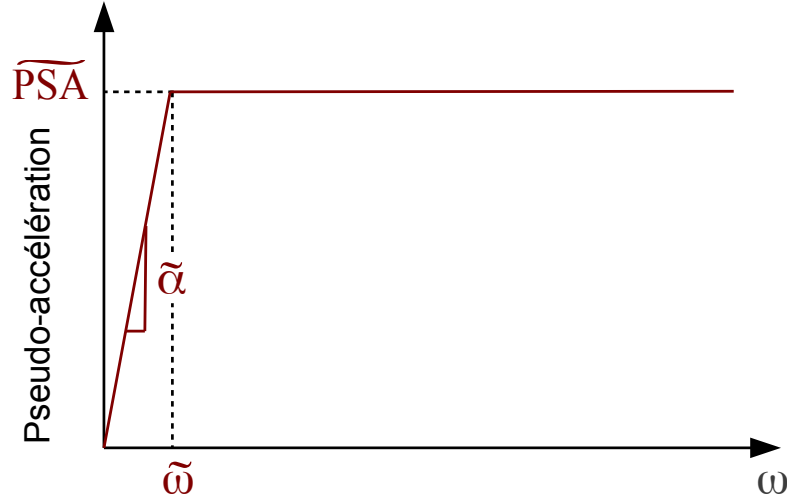
respecter la restriction (3.13). À la première vue, on a donc intérêt à choisir  $\gamma$  le plus faible possible et proche de  $(\lambda_{\max}(P))^2 n / \lambda_{\min}(Q)$ , pour ainsi garantir la plus faible borne du spectre de plancher. En revanche, il est à signaler que diminuer  $\gamma$  aura comme conséquence l'augmentation du rayon apparaissant dans la définition de  $S_x$  dans (3.14). En d'autres termes, dans cette situation la borne sur le spectre de plancher est garantie pour un ensemble restreint de trajectoires qui devront être situées de plus en plus loin par rapport à l'origine du système : il est nécessaire que la secousse sismique soit suffisamment forte pour engendrer des mouvements suffisamment importants dans la structure. Pour justifier cette observation, nous utilisons la relation

$$0 < \frac{b}{-a} \leq \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

et l'on remarque que dans la situation où l'on fixe le choix des matrices  $(P, Q)$ , alors diminuer  $\gamma$  aura comme conséquence l'augmentation de  $a$  qui s'approche de  $0_-$ , d'où  $1/(-a)$  et  $b/(-a)$  tendent vers  $+\infty$ .

Dans la continuité des observations susdites, notons que, afin de pouvoir assurer le plus large choix pour  $\gamma$ , le rapport  $(\lambda_{\max}(P))^2 / \lambda_{\min}(Q)$  devrait être le plus faible possible. Précisons que nous n'avons pas trouvé dans la littérature une solution au problème de minimisation de cette quantité par rapport à l'une des matrices  $(P, Q)$ .

À notre connaissance ces deux corollaires semblent être les premiers résultats dans la littérature, reliant le spectre de plancher aux paramètres de la loi de commande. Pour résumer les résultats, ces deux corollaires permettent de garantir une borne supérieure (*i.e.* une enveloppe) ayant l'allure de la courbe rouge de la figure 3.3, bien sûr, en supposant que toutes les conditions soient respectées.



**Figure 3.3** – Borne supérieure garantie sur l'ensemble des spectres de plancher

Sur la figure 3.3,  $\widetilde{\text{PSA}}$  représente la valeur constante indiquée à droite de l'inégalité (3.10),

$$\widetilde{\text{PSA}} = \frac{1}{m_b} \frac{1}{\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} \left( \mu F_N + \|v_1\| \max \left( \sqrt{\frac{x(t_0)' P x(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}}, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \mu_0 \right) \right).$$

La pulsation où les deux bornes garanties s'intersectent est

$$\tilde{\omega} = \widetilde{\text{PSA}}/\tilde{\alpha},$$

où la pente croissante

$$\tilde{\alpha} = \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} \gamma^2 \max_{t \geq t_0} \int_{t_0}^t |\ddot{x}_g(\tau)|^2 d\tau.$$

### Discussion et commentaires communs sur le [théorème 3.2](#), [corollaire 3.3](#) et [corollaire 3.4](#).

Les propriétés incluant le calcul de rayons de boules dans le [théorème 3.2](#), et les bornes exprimées dans le [corollaire 3.3](#) et le [corollaire 3.4](#) ont hérité des avantages, mais aussi des inconvénients de la théorie de Lyapunov. Rappelons et mettons en évidence deux points forts. Les résultats :

- ont été calculés sans avoir besoin de connaître explicitement les solutions des trajectoires  $x(t)$ ,
- s'appliquent à l'ensemble des trajectoires  $x(t)$  du système (3.5).

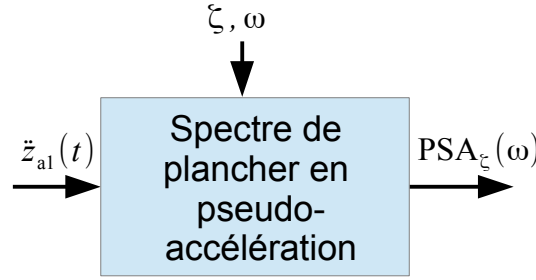
La critique principale qu'on peut faire aux résultats du théorème et des corollaires est qu'ils sont conservatifs (*i.e.* prudents). Par exemple, on peut remarquer :

- que le paramètre  $\varepsilon$  n'apparaît pas explicitement dans les expressions de  $b_0$  et  $T$ . Au contraire, dans les travaux de Leitmann et de ses collaborateurs sur le contrôle actif (voir en particulier, [Kelly et al., 1987](#), Appendice C), si  $\varepsilon = 0$  alors il est possible de démontrer la propriété de UGAS, sinon ce paramètre apparaît explicitement dans les expressions des propriétés de *uniform boundedness* et *uniform ultimate boundedness*. Il est à noter que dans ces travaux les *matching conditions* sont respectées. Par le choix que nous avons fait au début en enlevant ces conditions, nous avons perdu une certaine « finesse » au niveau des calculs.
- que les résultats prennent en compte la situation des perturbations les plus nuisibles. Mais, il se peut que le signal sismique le plus critique n'arrive jamais.

Une autre critique est que l'utilisateur n'a pas d'information sur ce qui se passe à l'intérieur des boules de rayon  $b_0$  : nous n'avons pas de moyen pour caractériser cette dynamique dans un voisinage de l'origine du système.

On verra dans la suite de cette section comment les choix des variables d'état  $x$ , de la paire de matrices  $(P, Q)$ , de la fonction  $\rho(x)$ , et du paramètre  $\varepsilon$  peuvent permettre de remédier aux faiblesses précédemment mentionnées.

**Vers l'application au problème de contrôle semi-actif : réduire les spectres de plancher.** Reprenons, en le simplifiant, le schéma de la [figure 1.15](#) sur le calcul du spectre de plancher en pseudo-accélération au niveau de la base. La [figure 3.4](#) met en évidence le fait que l'amélioration des spectres de plancher pourrait se faire en agissant sur  $\ddot{z}_{a1}(t)$ .



**Figure 3.4** – Diagramme bloc pour illustrer les entrées et les sorties du spectre calculé au niveau de la base d’une structure isolée

L’idée que nous allons utiliser par la suite est de décomposer le signal  $\ddot{z}_{a1}(t)$  en somme d’autres signaux ayant des propriétés qui nous permettront d’agir particulièrement sur les pics du spectre de plancher. Pour être plus spécifique, nous allons utiliser la décomposition en coordonnées généralisées ou modales détaillée dans la [section 2.1](#). On s’appuie sur le fait que la dynamique de chaque coordonnée généralisée ressemble à celle d’un système linéaire du second ordre avec une fréquence de coupure égale à  $\omega_i$  représentant la pulsation propre de vibration d’indice  $i$  de la structure ( $i = 1, \dots, n$ ). Revoir aussi les discussions à la page 82 autour de l’équation (2.10). À partir de ces observations nous avons choisi de pénaliser la contribution de chaque coordonnée généralisée d’indice  $i$  afin d’influencer l’allure des pics sur le spectre de plancher autour de chaque pulsation  $\omega_i$ .

Les idées présentées plus haut ne sont pas nouvelles : elles ont été utilisées par [Pham, 2010](#), §5, [Politopoulos et Pham, 2011](#), dans leurs travaux sur le choix du critère à minimiser dans la méthode LQR. Plus généralement, leur applicabilité est limitée aux situations où seulement quelques modes de vibration sont dominants. Il en est ainsi pour la méthode du *contrôle modal*, [Inman, 2006](#), §7.8, pp. 199, [Soong, 1990](#), dont nous avons discuté dans la partie dédiée à l’état de l’art.

Pour simplifier l’exposé nous nous limitons aux modèles réduits de structures à 2 DDL présentés dans les [sections 2.1.2](#) et [2.1.3](#), même si nombre des techniques présentées ci-après ne sont pas limitées au cas à 2 DDL.

Pour appliquer le [théorème 3.2](#), le choix des variables d’état et des paramètres de la loi de commande (3.6) est important. Notamment, nous allons utiliser des outils de la théorie des vibrations.

**Choix de  $\varepsilon$ .** Du point de vue pratique le choix de  $\varepsilon$  est notable. En effet, choisir des valeurs de plus en plus grandes pour  $\varepsilon$  auront comme conséquence :

- de produire des commandes de plus en plus lisses,
- d’éviter d’exciter la dynamique à hautes fréquences du processus commandé, [DeCarlo et al., 1988](#), pp. 228.

Pour des valeurs de  $\varepsilon$  tendant vers zéro la commande a tendance à être discontinue.

**Choix de  $\rho(x)$ .** Il est possible d’associer plusieurs rôles à la fonction  $\rho(x)$ . Une première approche, qui distingue nos travaux de ceux de la majorité de la littérature du génie parasismique, consiste à tenir compte de la limite supérieure en force  $F^{\max}$  supportée par l’actionneur en choisissant :

$$\rho(\dot{z}_{r1}) = \max(c_A^{\max}, F^{\max}/|\dot{z}_{r1}|) .$$

Ainsi nous prenons en compte la double contrainte sur l'actionneur : à savoir, la limite physique maximale du coefficient d'amortissement  $c_A$  et celle de la force produite par cet actionneur.

Une seconde approche consiste à définir

$$\rho(x) = c_A^{\max} (1 + \tanh(-|q_2(x)|)) \in (0, c_A^{\max}], \quad (3.15)$$

choix motivé par l'objectif de réduire les spectres de plancher notamment autour de la seconde fréquence propre de vibration dont  $q_2(x)$  représente la coordonnée généralisée ou modale.

**Choix des variables d'état  $x(t)$  et des matrices  $(P, Q)$ .** Toutes les représentations de modèles de structures isolées à 2 DDL présentées dans les [tableaux 2.3](#) et [2.4](#), et [tableaux 2.6](#) et [2.7](#), respectivement, constituent des candidats pour appliquer la loi de la commande du [théorème 3.2](#). Les deux modèles qui diffèrent par le système d'isolation au niveau de la base seront analysées en parallèle. Par rapport au choix de ces représentations, dans un deuxième temps il faudra choisir la paire des matrices  $(P, Q)$ . Cette tâche peut être plus ou moins difficile comme nous allons illustrer dans les méthodes suivantes.

**Méthodologie et simulations.** Pour privilégier la clarté de l'exposé, chacune des méthodes présentées ci-après se verront analysées systématiquement en plusieurs étapes :

Étape 1) choisir la représentation des systèmes à partir des [tableaux 2.3](#) et [2.4](#) et [tableaux 2.6](#) et [2.7](#), respectivement,

Étape 2) proposer une méthode pour la construction de la paire des matrices  $(P, Q)$  par rapport aux propriétés des matrices  $M, C, K$  indiquées dans le [tableau 2.1](#). Il est à noter que, vu le choix particulier des paramètres fixés dans le [tableau 2.2](#), les deux modèles de structures isolées à 2 DDL s'inscrivent dans les « situations » I, III et IV du [tableau 2.1](#).

Étape 3) effectuer des simulations numériques, en utilisant comme indicateurs de performance les courbes rouge et bleue reprises depuis la [figure 3.1](#). Effectuer ces comparaisons semble un choix naturel sachant que les systèmes de contrôle semi-actif sont une évolution des dispositifs de contrôle passif. Rappelons que le principe des systèmes semi-actifs consiste à changer en temps-réel les caractéristiques de la structure isolée (par exemple en terme de fréquences propres de vibration, déformées modales, etc.) au lieu d'appliquer directement une force pour contrecarrer l'effet de l'excitation sismique comme c'est le cas du contrôle actif, [Occhiuzzi et al., 2006](#), pp. 3, [Pham, 2010](#), pp. 12. C'est d'ailleurs une des raisons pour laquelle la comparaison sur les mêmes figures n'est pas faite avec ces derniers systèmes. Les signaux sismiques utilisés pour calibrer et valider les résultats sont ceux des [figures 2.8](#) à [2.10](#).

Étape 4) discussion sur les extensions possibles de la méthode par rapport : (i) aux autres « situations » plus générales avec les propriétés des matrices  $M, C, K$  indiquées dans le [tableau 2.1](#), (ii) aux autres représentations de la dynamique du système (coordonnées physiques, généralisées, modales), etc.

### Synthèse de CSA : Méthode 1.

Étape 1) On choisit de travailler avec la dynamique des systèmes exprimée en

« coordonnées physiques relatives » indiquées dans les [tableaux 2.3](#) et [2.6](#), respectivement.

Étape 2) On se place dans la « situation I » du [tableau 2.1](#). Afin d'influencer l'allure des spectres de plancher, nous utilisons la transformation vers les coordonnées généralisées ([2.7](#)) comme suit. Soit  $W$  une fonction à valeurs négatives qui sera utilisée pour construire le terme  $-x'Qx$ , à choisir librement par l'utilisateur, apparaissant dans les calculs de la dérivée de la fonction de Lyapunov le long des trajectoires du système. On choisit alors,

$$\begin{aligned} W &= -\gamma_1(q_{r1}^2 + \dot{q}_{r1}^2) - \gamma_2(q_{r2}^2 + \dot{q}_{r2}^2) \\ &= -\begin{pmatrix} q_r' & \dot{q}_r' \end{pmatrix} \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2) \begin{pmatrix} q_r \\ \dot{q}_r \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.16)$$

où les paramètres réels  $\gamma_i > 0$ . Le paramètre  $\gamma_1$  est utilisé pour pénaliser l'effet du premier mode de vibration, en termes de déplacement et vitesse généralisée. De la même façon  $\gamma_2$  est utilisé pour pénaliser l'effet du deuxième mode de vibration. La transformation inverse ([2.7](#)) où il faudra utiliser les propriétés d'orthogonalité ([2.6](#)) pour calculer explicitement  $\Phi^{-1}$ , permet d'exprimer  $W$  en termes de variables d'état

$$x = \begin{pmatrix} z_r \\ \dot{z}_r \end{pmatrix},$$

d'où

$$\begin{aligned} W &= -\begin{pmatrix} (\Phi'Mz_r)' & (\Phi'M\dot{z}_r)' \end{pmatrix} \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2) \begin{pmatrix} \Phi'Mz_r \\ \Phi'M\dot{z}_r \end{pmatrix} \\ &= -x' \text{diag}\left(M'\Phi \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2) \Phi'M, M'\Phi \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2) \Phi'M\right) x. \end{aligned}$$

En imposant  $-x'Qx = W$ , on retrouve par les calculs la matrice bloc diagonale suivante

$$Q = \text{diag}\left(M'(\gamma_1\varphi_1\varphi_1' + \gamma_2\varphi_2\varphi_2')M, M'(\gamma_1\varphi_1\varphi_1' + \gamma_2\varphi_2\varphi_2')M\right). \quad (3.17)$$

Étape 3) Des résultats de simulation se trouvent dans la [figure 3.5](#) : sur la première colonne nous avons utilisé le modèle de structure isolée par appui en élastomère et l'amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable (voir détails dans la [section 2.1.2](#)), tandis que sur la seconde colonne nous avons utilisé le modèle de structure isolée par pendule de frottement (*i.e.* patin de frottement sec + raideur), et l'amortisseur visqueux à coefficient d'amortissement variable (voir détails dans la [section 2.1.3](#)). Pour chaque modèle, les paramètres du contrôleur ont été calibrés et fixés une bonne fois pour toutes les trois simulations, en utilisant le signal sismique n° 1. Les deux autres figures, où nous avons utilisé les signaux sismiques n° 2 et n° 3, respectivement, servent pour validation et support de discussion ultérieure : sachant que le choix des paramètres de la loi de commande a été effectué par rapport à un seul signal sismique, on peut se poser la question de savoir si les résultats ont une valabilité locale, restreinte à un seul signal sismique, ou bien si elles sont valables pour des situations plus générales. Au vu des explications du



début de ce chapitre, nous pouvons conclure à partir des figures 3.5c à 3.5f qu'une amélioration du contrôle semi-actif par rapport au cas passif a été réalisée : le premier pic de la courbe verte est situé très proche de celui de la courbe bleue et bien en dessous cette dernière courbe autour de la seconde fréquence propre de vibration, pas très loin de la courbe rouge. Le choix des paramètres de la loi de commande se trouve dans le tableau 3.1.

Appui en élastomère (revoir le modèle complet dans la section 2.1.2)	Pendule de frottement (revoir le modèle complet dans la section 2.1.3)
$\varepsilon = 10^{-2},$ $\rho(x) \equiv c_A^{\max},$ $Q$ est donné par (3.17) où, $\gamma_1 = 3,$ $\gamma_2 = 10^4$	$\varepsilon = 10^{-1},$ $\rho(x) \equiv c_A^{\max},$ $Q$ est donné par (3.17) où, $\gamma_1 = 5 \times 10^{-3},$ $\gamma_2 = 9 \times 10^2$

**Tableau 3.1** – Choix des paramètres de la loi de commande semi-active

Cette méthode a fait l'objet d'une publication, Teodorescu *et al.*, 2013b, où on retrouve les résultats de simulation situés sur la colonne de gauche de la figure 3.5.

La figure 3.6a est complémentaire à la figure 3.5a, les deux étant issues de la même simulation. Dans la figure 3.6a nous avons illustré en vert l'évolution temporelle de la force générée par l'actionneur semi-actif,  $F_A(t) = c_A(t) \dot{z}_{r1}(t)$ . On observe que celle-ci devient importante en comparaison avec la force imposée par la sollicitation sismique (*i.e.*, la force extérieure) au niveau de la base  $F_P(t) = m_b \ddot{x}_g(t)$ , plutôt après les parties fortes de la sollicitation quand le mouvement de la structure devient important. Les mêmes tendances se retrouvent sur la figure 3.6b, issue de la même simulation numérique que la figure 3.5b.

Étape 4) Plusieurs extensions peuvent être envisagées. Dans un premier temps, précisons que pour des modèles de structures isolées se situant dans la « situation II » du tableau 2.1, la même stratégie de contrôle s'applique.

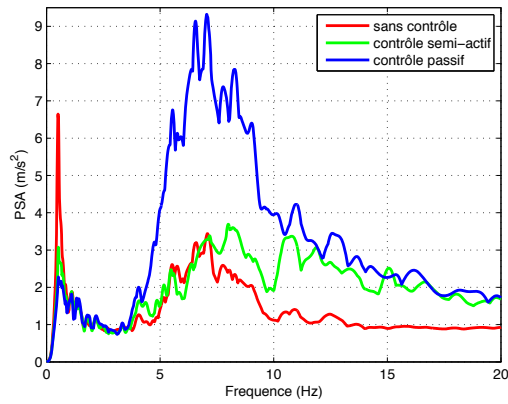
Dans un second temps, on peut tester ce schéma de contrôle en changeant la représentation du système pour passer aux « coordonnées physiques absolues » indiquées dans le tableau 2.3 et tableau 2.6, respectivement. Dans ce cas, au lieu d'utiliser la transformation (2.7), il faudra utiliser (2.8), et remplacer le choix de  $W$  de (3.16) par

$$\begin{aligned}
 W &= -\gamma_1(q_{a1}^2 + \dot{q}_{a1}^2) - \gamma_2(q_{a2}^2 + \dot{q}_{a2}^2) \\
 &= -\begin{pmatrix} q_a' & \dot{q}_a' \end{pmatrix} \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_1, \gamma_2) \begin{pmatrix} q_a \\ \dot{q}_a \end{pmatrix},
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

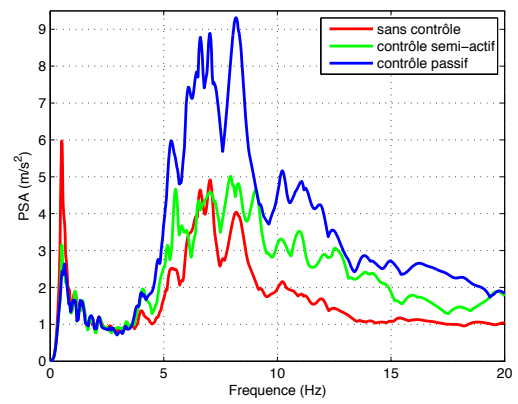
où les paramètres réels  $\gamma_i > 0$  gardent le même rôle. A partir de la transformation inverse (2.8) et les propriétés d'orthogonalité (2.6) pour calculer explicitement  $\Phi^{-1}$ , on impose  $-x'Qx = W$  où cette fois-ci

$$x = \begin{pmatrix} z_a \\ \dot{z}_a \end{pmatrix},$$

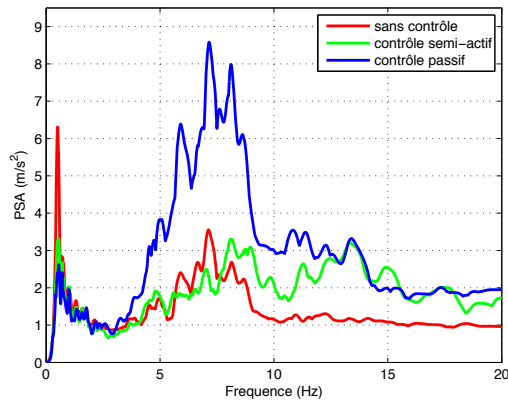




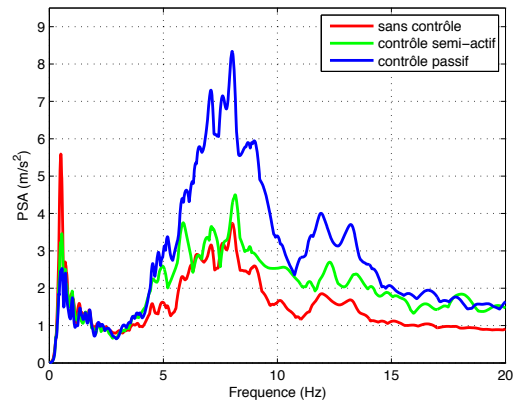
(a) Appui en élastomère ; signal sismique artificiel n° 1



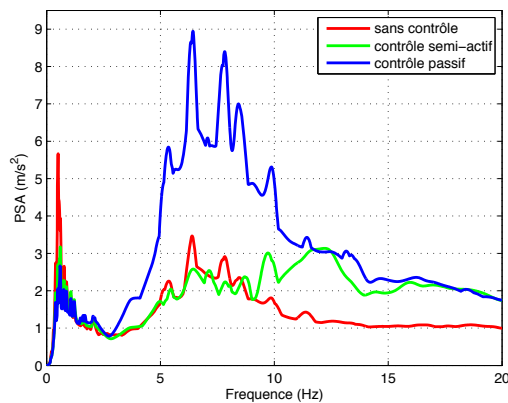
(b) Pendule de frottement ; signal sismique artificiel n° 1



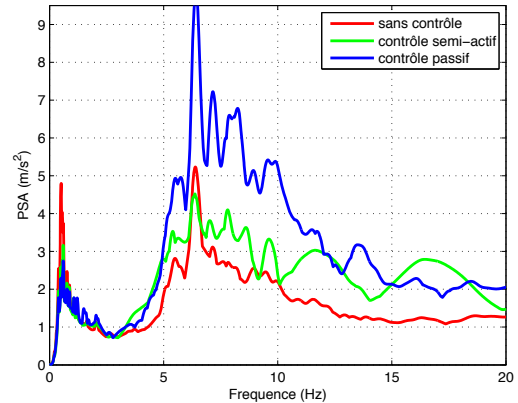
(c) Appui en élastomère ; signal sismique artificiel n° 2



(d) Pendule de frottement ; signal sismique artificiel n° 2

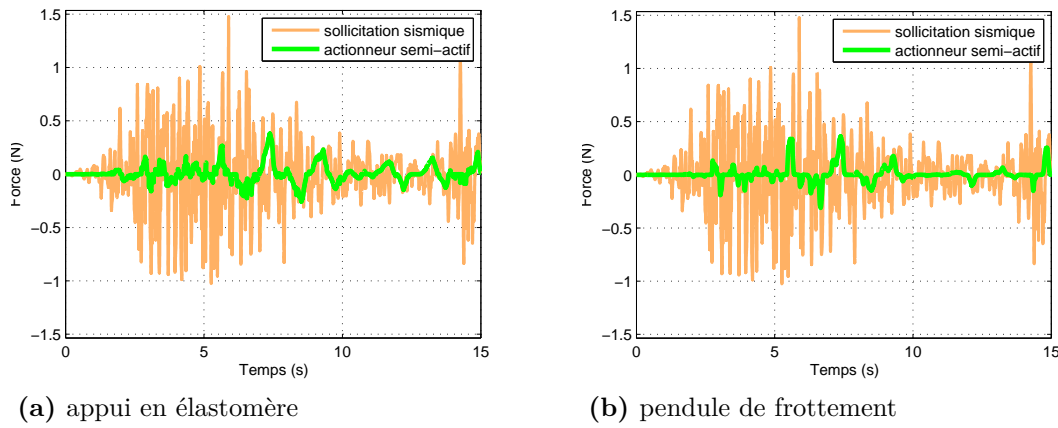


(e) Appui en élastomère ; signal sismique artificiel n° 3



(f) Pendule de frottement ; signal sismique artificiel n° 3

**Figure 3.5** – Spectres de plancher au niveau de la base : structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d'appuis parasismiques et sa réponse aux plusieurs signaux sismiques artificiels



**Figure 3.6** – Comparaison de forces au niveau de la base : structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d'appuis parasismiques en réponse au signal sismique artificiel n° 1

et l'on retrouve par les calculs la même matrice bloc diagonale  $Q$  cf. (3.17). En particulier, le cas du modèle de structure indiqué sur la seconde colonne du [tableau 2.6](#), avec un choix de  $Q$  donné par (3.17) a été analysé dans notre publication, [Teodorescu et al., 2013a](#). Si l'on fait une comparaison des deux méthodes, les résultats de simulations montrent une amélioration des spectres de plancher pour les fréquences supérieures au-delà de la seconde fréquence propre de vibration. C'est pourquoi le choix de travailler avec les coordonnées physiques absolues semble plus approprié que celui des coordonnées physiques relatives.

Analysons en détails la « situation III » du [tableau 2.1](#) dans la méthode suivante, qui a la particularité d'utiliser les coordonnées modales complexes (*i.e.*  $\in \mathbb{C}$ ) dans la construction des paramètres de la loi de commande.

### Synthèse de CSA : Méthode 2.

Étape 1) On choisit de travailler avec la dynamique des systèmes exprimées en « coordonnées physiques absolues » indiquées dans les [tableaux 2.3](#) et [2.6](#), respectivement.

Étape 2) On se positionne dans la « situation III » du [tableau 2.1](#). C'est pourquoi on peut utiliser la transformation vers les coordonnées modales complexes absolues (2.18) de la façon suivante pour influencer l'allure des spectres de plancher. On fait de même avec la méthode précédente, soit  $W$  une fonction définie négative qui sera utilisée pour construire le terme  $-x'Qx$ , libre au choix de l'utilisateur, apparaissant dans les calculs de la dérivée de la fonction de Lyapunov le long des trajectoires du système. Alors, on choisit

$$\begin{aligned}
 W &= -\gamma_1 |q_{ca1}|^2 - \gamma_2 |q_{ca2}|^2 \\
 &= -\gamma_1 q_{ca1} \overline{q_{ca1}} - \gamma_2 q_{ca2} \overline{q_{ca2}} \\
 &= - \begin{pmatrix} q_{ca1} & q_{ca2} & \overline{q_{ca1}} & \overline{q_{ca2}} \end{pmatrix} \Gamma \begin{pmatrix} q_{ca1} \\ q_{ca2} \\ \overline{q_{ca1}} \\ \overline{q_{ca2}} \end{pmatrix} \\
 &= -q_{ca}' \Gamma q_{ca},
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

où

$$\Gamma = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \\ \gamma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et les paramètres de réglage ont comme objectif de pénaliser chaque mode de vibration :  $\gamma_1$  est utilisé pour pénaliser le premier mode de vibration, tandis que  $\gamma_2$  est utilisé pour pénaliser l'effet du second mode. La transformation inverse (2.18) où il faudra utiliser les propriétés d'orthogonalité (2.22) pour calculer explicitement  $\mathcal{V}^{-1}$ , permet d'exprimer  $W$  en termes de variables d'état

$$x = \begin{pmatrix} z_a \\ \dot{z}_a \end{pmatrix},$$

d'où

$$W = -(\mathcal{V}'\mathcal{B}x)' \Gamma \mathcal{V}'\mathcal{B}x.$$

On impose  $-x'Qx = W$ , et l'on retrouve après les calculs la matrice réelle suivante

$$Q = \mathcal{B}' \Re(\gamma_1 v_1 \overline{v_1}' + \gamma_2 v_2 \overline{v_2}') \mathcal{B}. \quad (3.20)$$

Un détail technique pour calculer la relation finale (3.20) est que nous avons utilisé la propriété des formes quadratiques

$$x'Hx = x' \Re(H) x, \quad \forall x \in \mathbb{R}^{2n}$$

où  $H$  est une matrice complexe hermitienne quelconque. Concernant la preuve, il faut décomposer la matrice  $H$  en partie réelle (qui est une matrice réelle symétrique) et partie imaginaire (qui est une matrice anti-symétrique<sup>5</sup>), puis réécrire  $x'Hx$  pour séparer en deux la partie réelle de la partie imaginaire. Ensuite, observer que la partie imaginaire s'annule<sup>6</sup> sur tout le domaine de définition de la variable  $x$ , parce qu'il s'agit d'une fonction quadratique construite à partir d'une matrice anti-symétrique. Pour plus de détails, voir, [Gantmacher, 1966](#), pp. 2.

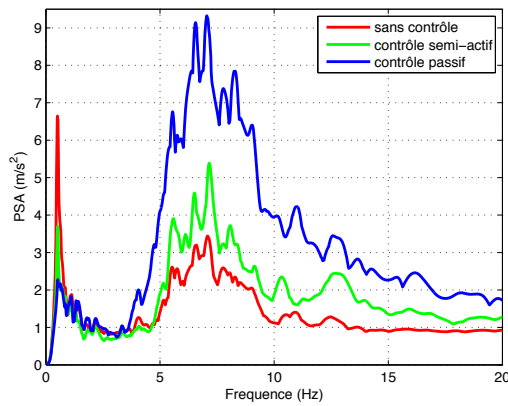
Étape 3) Les résultats des simulations se trouvent dans la [figure 3.7](#), où les paramètres de la loi de commande ont été fixés à partir des valeurs indiqués dans le [tableau 3.2](#).

Par rapport à la [figure 3.5](#), nous avons gardé le même format de présenter les résultats : le signal sismique n°1 est utilisé pour calibrer les résultats et les deux autres signaux sismiques sont utilisés pour validation. Les illustrations montrent des améliorations par rapport au cas du système passif. Une remarque générale des résultats de simulation au cas où l'on utilise la représentation du système en coordonnées physiques absolues est que les spectres de plancher correspondant au système semi-actif donnent l'impression de se stabiliser assez vite au-delà la deuxième fréquence d'isolation. À l'inverse, il est plus difficile d'arriver à une observation similaire pour le cas où la représentation par les coordonnées physiques relatives est utilisée (voir la [figure 3.5](#)).

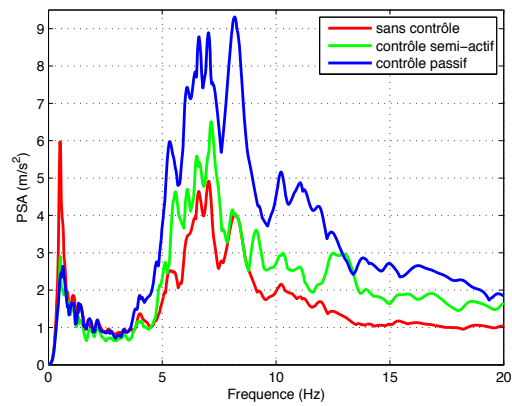
De façon analogue à la méthode précédente, dans la [figure 3.8](#) nous avons illustré les évolutions temporelles de la force générée par l'actionneur semi-actif et de la force

5. en anglais : skew-symmetric matrix

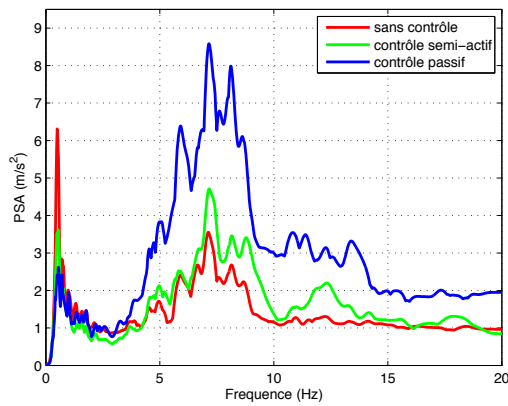
6. en anglais : vanishes



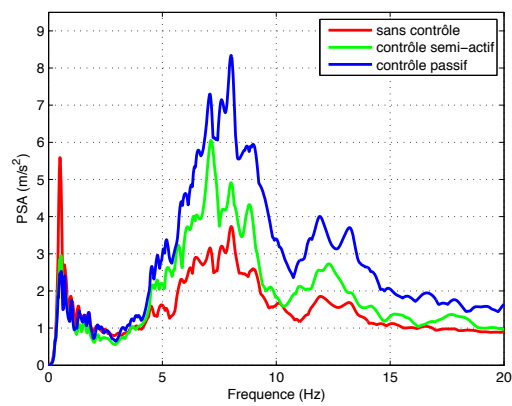
(a) Appui en élastomère ; signal sismique artificiel n° 1



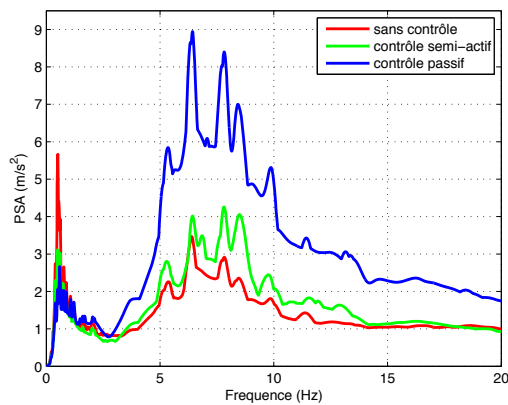
(b) Pendule de frottement ; signal sismique artificiel n° 1



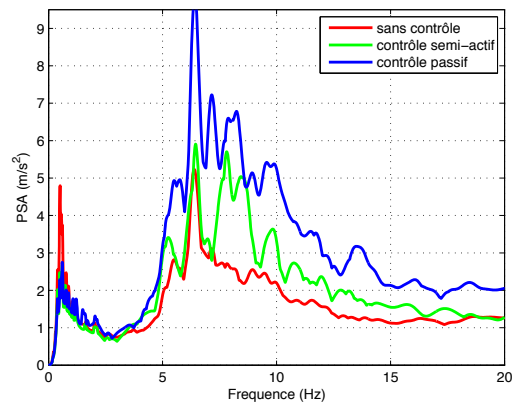
(c) Appui en élastomère ; signal sismique artificiel n° 2



(d) Pendule de frottement ; signal sismique artificiel n° 2

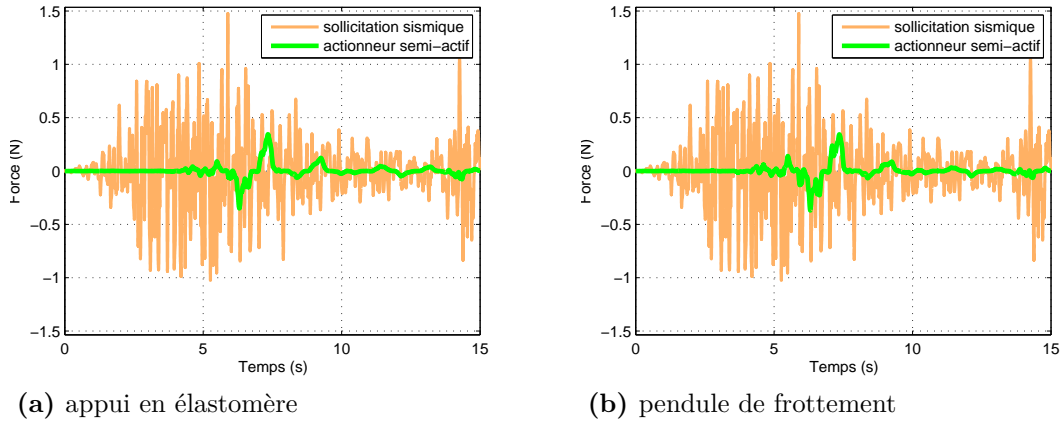


(e) Appui en élastomère ; signal sismique artificiel n° 3



(f) Pendule de frottement ; signal sismique artificiel n° 3

**Figure 3.7** – Spectres de plancher au niveau de la base : structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d'appuis parasismiques et sa réponse à plusieurs signaux sismiques artificiels



**Figure 3.8** – Comparaison de forces au niveau de la base : structure à 2 DDL sismiquement isolée par divers types d’appuis parasismiques en réponse au signal sismique artificiel n° 1

Appui en élastomère (revoir le modèle complet dans la <a href="#">section 2.1.2</a> )	Pendule de frottement (revoir le modèle complet dans la <a href="#">section 2.1.3</a> )
$\varepsilon = 10^{-2}$ , $\rho(x) \equiv c_A^{\max}$ , $Q$ est donné par (3.20) où, $\gamma_1 = 3 \times 10^{-1}$ , $\gamma_2 = 5$	$\varepsilon = 10^{-1}$ , $\rho(x) \equiv c_A^{\max}$ , $Q$ est donné par (3.20) où, $\gamma_1 = 2 \times 10^{-2}$ , $\gamma_2 = 5$

**Tableau 3.2** – Choix des paramètres de la loi de commande semi-active

sismique au niveau de la base : les résultats des figures 3.7a et 3.8a sont associés à la même simulation numérique, de même que pour les résultats des figures 3.7b et 3.8b.

Étape 4) Plusieurs extensions peuvent être présentées.

La représentation en coordonnées physiques relatives (2.17) peut être utilisée et les mêmes étapes présentées plus haut vont aboutir au calcul de la matrice  $Q$  qui sera également de la forme (3.20). Pourtant, il est à noter que l'expérience acquise par les simulations montre, une fois de plus, une supériorité des résultats si la représentation en coordonnées physiques absolues est utilisée : sur les deux modèles de structures isolées à 2 DDL étudiées, on observe une atténuation plus prononcée au delà de la deuxième fréquence de vibration.

Dernièrement, précisons que la même méthodologie peut être utilisée pour le cas le plus général analysé dans cette thèse, identifié par la « situation IV » du tableau 2.1. On utilisera les mêmes transformations entre l'espace physique et celui des coordonnées modales complexes, à savoir (2.17) ou (2.18). Ce qui change est le calcul de l'inverse de la matrice de transformation qui sera effectué à partir des relations (2.26). Pour rappel, dans la « situation » présente, les relations d'orthogonalité entre les vecteurs propres de droite ne sont plus valables. C'est pourquoi il faut utiliser les relations entre les vecteurs propres de droite et de gauche. Tous calculs faits, la matrice  $Q$  s'écrit :

$$\begin{aligned} Q &= \mathcal{B}' \mathcal{W} \begin{pmatrix} 0 & 0 & \gamma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathcal{W}' \mathcal{B} \\ &= \mathcal{B}' \Re(\gamma_1 w_1 \bar{w}_1' + \gamma_2 w_2 \bar{w}_2') \mathcal{B}. \end{aligned}$$

### D'autres méthodes de synthèse de CSA.

1. Dans les deux méthodes étudiées plus haut, nous n'avons utilisé que deux parmi les six représentations présentées pour chaque modèle de structure isolée dans les tableaux 2.3 et 2.4, et tableaux 2.6 et 2.7 : il s'agit des coordonnées physiques. Il se trouve que les quatre autres simplifient beaucoup la tâche de choisir la paire de matrices  $(P, Q)$ . Par exemple, on peut prendre  $Q$  comme matrice diagonale composée de paramètres réels positifs qui auront le rôle de pénaliser une coordonnée généralisée soit en déplacement, soit en vitesse. Les résultats de simulations, pas incluses dans ce mémoire de thèse, gardent les mêmes tendances que celles des figures 3.5 et 3.7.

2. La situation où l'on commence par le choix de la matrice  $P$  au lieu de  $Q$  est inhabituelle en automatique pour des raisons qui ont été mentionnées, par exemple dans Hedrick et Girard, 2005, §7, pp. 91, Vidyasagar, 2002, §5.4.2, pp. 198. Dans ce cas, il s'agit de travailler directement sur l'allure de la fonction de Lyapunov candidat  $V(x) = x'Px$ . Pour notre problème de contrôle semi-actif, une première approche pourrait être d'essayer de la définir dans l'espace des coordonnées généralisées, par exemple,

$$V(x) = \gamma_1(q_1^2 + \dot{q}_1^2) + \gamma_2(q_2^2 + \dot{q}_2^2)$$

où les paramètres  $\gamma_i > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Cette piste constitue une perspective et ne sera pas poursuivie ici.

3. Une autre approche consiste à fabriquer convenablement un vecteur de variables d'état  $x$ . Évoquons deux possibilités : (i) par une combinaison linéaire de produits de déformées modales multipliées par coordonnées généralisées (ou, alternativement, produits de vecteurs propres multipliés par coordonnées modales). Dans ce cas, les paramètres de réglage sont constitués par les coefficients multiplicatifs utilisés lors de la définition de ces relations. Par exemple, dans les cas des structures à 2 DDL en coordonnées absolues, alors construire le vecteur des variables d'état

$$x(t) = \gamma_1 \varphi_1 q_{a1}(t) + \gamma_2 \varphi_2 q_{a2}(t),$$

où les paramètres  $\gamma_1$  et  $\gamma_2$  seront ainsi utilisés pour fixer les poids (*i.e.* les contributions) de chaque mode. Pour donner une solution à notre problème de contrôle défini dans la [section 1.3.2](#), l'idée derrière est d'amplifier excessivement la contribution du deuxième mode en fixant  $\gamma_2 \gg \gamma_1$  dans l'élaboration de la loi de commande, tel que le contrôleur puisse agir en priorité sur la réduction de ce mode. Les résultats de simulation confirment ces explications. Pour simplifier,  $\gamma_1$  peut être fixé à la valeur de 1.

La deuxième possibilité que nous aimerions évoquer est de (ii) filtrer les signaux en coordonnées généralisées ou modales, dans une bande de fréquence spécifique pour ainsi amplifier localement les contributions de chaque mode de vibration. Les bandes privilégiées seront situées autour des fréquences propres des modèles de structures, là où la sensibilité de la structure est concentrée et où l'on observe l'amplification la plus importante des pics sur le spectre de plancher. Reprenons l'exemple des structures à 2 DDL et décidons de travailler en coordonnées absolues : soit la transformée de Laplace du vecteur des variables d'état

$$X(s) = \text{diag}(G_1(s), G_1(s), G_2(s), G_2(s)) \begin{pmatrix} q_{a1}(s) \\ \dot{q}_{a1}(s) \\ q_{a2}(s) \\ \dot{q}_{a2}(s) \end{pmatrix}, \quad (3.21)$$

où les filtres  $G_i(s)$  sont utilisés pour pénaliser le  $i$ ème mode de vibration,  $i = 1, 2$ . Un choix simple consiste à utiliser des filtres du second ordre avec amortissement sous-critique ayant un zéro à l'origine et une fréquence de coupure identique aux fréquences propres du modèle de la structure. De cette façon nous avons construit un filtre ayant une pente de +20 décibels/décade avant et -20 décibels/décade après la fréquence de coupure, respectivement, et une amplification qui est de plus en plus prononcée à la fréquence de coupure, que le taux d'amortissement du filtre s'approche de zéro. Afin de couper mieux le contenu spectral autour de ces fréquences de coupure, on peut utiliser plusieurs de ces filtres en série et ainsi obtenir des pentes de  $\pm 20$  décibels/décade multiplié par leur nombre. Après avoir choisi ces filtres, le passage dans le domaine temporel est possible en appliquant la transformation de Laplace inverse à l'équation (3.21). On obtient ainsi la dynamique de  $x(t)$  et on peut passer à l'étape de l'élaboration de la loi de commande, en suivant les instructions du [théorème 3.2](#).

Nous avons utilisé cette technique avec des bons résultats de simulation, comparables à ceux de la [figure 3.7](#). Signalons que à l'époque où les simulations ont été effectuées, un autre type de loi de commande a été utilisée, à savoir le *damping control*, [Sepulchre et al., 1997](#), §3.5.2.

Dès que le vecteur d'état  $x(t)$  a été construit convenablement, il convient de poser la question du choix de la paire de matrices  $(P, Q)$ . Le choix  $Q = 1_{2n \times 1}$  nous

semble un bon candidat et peut être justifié par les résultats en termes de boules du [théorème 3.2](#) (voir les discussions après l'énoncé du [théorème 3.2](#) et notamment autour des travaux de [Patel et Toda, 1980](#)).

**Remarques générales à partir des résultats de simulation.** Si les signaux sismiques utilisés pour calibrer les paramètres de la loi de commande sont trop faibles en amplitude par rapport aux signaux utilisés pour valider et tester les schémas de contrôle semi-actif, il existe le risque que la loi de commande soit saturée pendant le régime de fonctionnement et le dispositif semi-actif agirait comme un dispositif passif avec un coefficient d'amortissement conséquent. C'est pourquoi, on ne retrouvera pas les améliorations attendues en termes de spectres de plancher. Au contraire, si l'on utilise pour l'étape de validation et test, des signaux de faible niveau comparés aux signaux de calibration, alors l'effet du dispositif semi-actif sur le comportement global de la structure est négligeable. En conclusion, il est nécessaire d'arriver à utiliser toute la plage de 0 à 100% de la loi de commande en évitant les bornes extrêmes, sinon, il sera impossible de tirer bénéfice correctement de la phase active du dispositif semi-actif.

Pour les deux méthodes présentées, les paramètres de réglage choisis  $\gamma_i$  correspondant au deuxième mode de vibration sont supérieurs à ceux correspondant au premier mode de vibration,  $\gamma_2 \gg \gamma_1$ . En d'autres termes, s'il semblerait que cette loi de commande agit naturellement vers la réduction du premier pic sur les spectres de plancher, remarque en accord avec le résultat du [corollaire 3.4](#). En revanche il est nécessaire de spécifier, lors de l'étape de calibrage, de pénaliser fortement le deuxième mode pour retrouver les résultats voulus sur les spectres de plancher. Pour se faire une idée sur les ordres de grandeur, voir les [tableaux 3.1](#) et [3.2](#).

En utilisant des signaux sismiques issus d'événements historiques, des simulations non incluses dans ce mémoire de thèse montrent que le comportement le plus défavorable<sup>7</sup> du dispositif semi-actif est comparable en terme de spectres de plancher avec celui des dispositifs passifs à forte dissipation.

À partir de l'ensemble des simulations effectuées à ce jour, nous n'avons pas de résultats pour conclure que le schéma de contrôle semi-actif proposé par le [théorème 3.2](#) est plus performant que ceux qui existent dans la littérature, dont celui proposé par [Politopoulos et Pham, 2011](#).

Pour calibrer les paramètres de la loi de commande nous avons utilisé des *essais itératifs* à partir d'un seul signal sismique. Plusieurs améliorations peuvent être mentionnées : (i) choisir les paramètres à partir d'une moyenne obtenue avec plusieurs signaux sismiques, et (ii) chercher une méthode automatique pour régler ces paramètres, par exemple un algorithme d'optimisation numérique. Un premier choix de candidats pour la fonction coût consiste à utiliser les normes habituelles (par exemple  $L_2$ ) appliquées aux spectres de plancher.

### 3.2.2 Prise en compte de modèles de signaux sismiques

Lors de la conception du système de contrôle, deux approches sont possibles vis-à-vis des signaux sismiques :

---

7. en anglais : worst case behavior



- (i) Une première stratégie consiste à mesurer les excitations par des capteurs mis en pied de la structure isolée. Dans ce cas, il existe une solution théorique qui consiste à annuler l'effet des signaux sismiques en partant de la représentation en coordonnées absolues. En d'autres termes, si on regarde le modèle réduit de la structure isolée (2.3) on voit que l'actionneur et les signaux sismiques se trouvent sur la même équation. Dans le cas *idéalisé*, avec une solution de contrôle actif il est possible de proposer la solution de *rejet* total de l'excitation, qui consiste à écrire la force de l'actionneur

$$u = +c_b \dot{x}_g + k_b x_g - \mu F_N \text{sign}(\dot{z}_{a1} - \dot{x}_g),$$

où on remarque que les signes ont été inversés par rapport au système (2.3). Le résultat est que la structure isolée ne bougera pas, quel que soit le signal sismique d'entrée. En pratique, si on se rappelle que : (i) le modèle réduit n'est qu'une approximation du modèle réel d'où l'apparition des incertitudes ; les temps de retard ont été négligés, et (ii) les mesures des capteurs sismiques ne sont pas parfaites, etc., font que cette solution a ses limites.

Dans le cas du contrôle semi-actif la solution théorique

$$c_A = \frac{1}{\dot{z}_{a1} - \dot{x}_g} (c_b \dot{x}_g + k_b x_g - \mu F_N \text{sign}(\dot{z}_{a1} - \dot{x}_g))$$

n'est pas physiquement réalisable à cause de la singularité en  $\dot{z}_{a1} = \dot{x}_g$ . Il est nécessaire d'ajouter des saturations.

- (ii) Une deuxième approche consiste à traiter les entrées sismiques comme des perturbations. C'est l'approche la plus courante et répandue en automatique, de traiter systématiquement les signaux sismiques comme des perturbations sur les schémas de contrôle. Tout le travail que nous avons effectué dans le [chapitre 3](#) s'inscrit dans cette direction, c'est-à-dire de définir des problèmes de contrôle *d'atténuation* de perturbation. Dans ce cas, il est important de calibrer correctement la loi de commande.

Le calibrage des lois de commande est essentiel pour assurer l'efficacité du système de protection parasismique pour faire face aux secousses sismiques inconnues. D'où la thématique de chercher des modèles de signaux sismiques fidèles et réalistes, ce qui est très difficile en pratique. Dans la [section 2.3.4](#) nous avons proposé trois modèles, dont

- un modèle stochastique, dont l'utilisation était motivée notamment par la réglementation française en sûreté nucléaire ;
- deux modèles déterministes, dont l'utilisation était cette fois-ci motivée par la facilité d'en tenir compte lors de la conception d'un schéma de contrôle : ils peuvent être mis sous la forme de systèmes d'EDO. Dans ce cas, la solution classique, [Duc, 2005](#), consiste à augmenter le vecteur des variables d'état par ces variables internes du modèle de signaux sismique et en déduire la loi de commande. Il est clair que cette dernière dépendra de la dynamique du modèle de signal sismique utilisé.

En pratique, on ne peut pas prétendre pouvoir anticiper (et modéliser) le vrai signal sismique qui arrivera en pied de la structure. C'est pourquoi, afin de calibrer, valider et tester les schémas de contrôle, la question concernant le choix de modèles à utiliser devra être levée. Pour notre problème, travailler avec les modèles décrits dans la [section 2.3.1](#) est un choix plus raisonnable : leur nature est non déterministe

(l'évolution temporelle est *a priori* inconnue), mais ils ont un spectre de sol connu fixé à l'avance.

Au lieu de modéliser effectivement les signaux sismiques, les sismologues proposent d'utiliser un ensemble restreint de caractéristiques dont l'accélération maximale du sol  $\ddot{x}_g^{\max}$  (à savoir la PGA), à partir de lois empiriques et semi-empiriques. D'où le lien avec l'hypothèse du [théorème 3.2](#) sur la connaissance de  $\ddot{x}_g^{\max}$ . D'ailleurs, il est assez naturel de proposer comme perspective d'essayer d'intégrer plus de caractéristiques des signaux sismiques lors de la calibration de la loi de commande.

### 3.2.3 Vers l'emploi d'outils temps-fréquence pour la commande optimale

L'objectif de ces travaux est d'essayer d'intégrer des critères de type temps-fréquence dans la synthèse de lois de commande. Sachant que les travaux de thèse sur cette partie n'ont pas abouti à des résultats concrets, notre intention est de présenter plus modestement le chemin parcouru.

Nous nous intéressons à la synthèse de lois de commande optimales par rapport aux fonctions coût définies sur des horizons en temps-fréquence. Un candidat est constitué par la DWV convoluée par une fonction fenêtre rectangulaire<sup>8</sup>, en extension des fonctions habituelles utilisées par la méthode LQR grâce aux propriétés de « marginales ».

Pour en illustrer l'intérêt, précisons que

$$\begin{aligned} J &= \int_0^T x(t)^* x(t) + \rho u(t)^* u(t) dt \\ &= \int_0^T \int_{-\infty}^{\infty} W_x(t, \omega) + \rho W_u(t, \omega) d\omega dt \end{aligned}$$

où le paramètre de réglage  $\rho > 0$ .

La fonction critère analysée dans cette sous-section est

$$\boxed{J_{T,\Omega} = \int_0^T \int_{-\Omega}^{\Omega} W_x(t, \omega) + \rho W_u(t, \omega) d\omega dt} \quad (3.22)$$

Le travail exploratoire qui sera effectué consiste à étudier si, en choisissant librement les valeurs de  $T$  et  $\Omega$ , on peut espérer une meilleure prise en compte du régime transitoire des variables d'état et de la commande. Deux études seront présentées : d'abord sur une EDO du 1<sup>er</sup> ordre et ensuite sur une EDO du 2<sup>e</sup> ordre.

**Étude sur une EDO du 1<sup>er</sup> ordre.** Nous nous intéressons au problème de stabiliser une équation différentielle du premier ordre (qu'on peut appeler un système du premier ordre), qui est naturellement instable, en utilisant des fonctions coût DWV.

Soit le système dynamique du premier ordre, naturellement instable

$$\dot{x} = \alpha x + u, \quad x(0) = x_0 \quad (3.23)$$

---

8. en anglais : rectangular function

où le paramètre  $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$ ;  $x$  et  $u$  sont des scalaires; la condition initiale  $x_0 \in \mathbb{R}$ . On fait également une hypothèse sur la commande, en disant qu'elle est linéaire en l'état, donc de la forme

$$u(x) = kx \quad (3.24)$$

où  $k \in \mathbb{R}$  est donc un scalaire. Les équations (3.23) et (3.24) forment un système linéaire en boucle fermée.

L'objectif de contrôle est de trouver le paramètre  $k$  qui minimise le critère coût temps fréquence (3.22).

**Solution.** Commençons les calculs. La solution de l'EDO bouclée par les équations (3.23) et (3.24) est donné par

$$x(t) = x_0 e^{(\alpha+k)t} \mathbf{1}_{t \geq 0} \quad (3.25)$$

On a donc, pour  $t \geq 0$ ,

$$\begin{aligned} W_x(t, \omega) &= \frac{x_0^2}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\alpha+k)(t-\frac{\tau}{2})} e^{(\alpha+k)(t+\frac{\tau}{2})} e^{-j\tau\omega} \mathbf{1}_{|\tau| \leq 2t} d\tau \\ &= \frac{x_0^2}{2\pi} \int_{-2t}^{2t} e^{(\alpha+k)(t-\frac{\tau}{2})} e^{(\alpha+k)(t+\frac{\tau}{2})} e^{-j\tau\omega} d\tau \\ &= \frac{x_0^2}{2\pi} e^{2(\alpha+k)t} \int_{-2t}^{2t} e^{-j\tau\omega} d\tau \\ &= \frac{x_0^2}{\pi\omega} e^{2(\alpha+k)t} \sin 2t\omega \end{aligned}$$

Calculons ensuite,  $W_u(t, \omega) = W_{kx}(t, \omega) = |k|^2 W_x(t, \omega)$ .

On va remplacer  $W_x(t, \omega)$  et  $W_u(t, \omega)$  dans l'équation (3.22) pour retrouver

$$\begin{aligned} J_{T,\Omega} &= \int_0^T \int_{-\Omega}^{\Omega} W_{x,x}(t, \omega) + \rho W_{u,u}(t, \omega) d\omega dt \\ &= (1 + \rho k^2) \int_0^T \int_{-\Omega}^{\Omega} W_{x,x}(t, \omega) d\omega dt \\ &= (1 + \rho k^2) \frac{x_0^2}{\pi} \int_0^T \int_{-\Omega}^{\Omega} \frac{1}{\omega} e^{2(\alpha+k)t} \sin 2t\omega d\omega dt \end{aligned} \quad (3.26)$$

En introduisant le changement de variables  $s = s(\omega)$ ;  $s = t\omega$  utilisé à la place de  $\omega$ , on obtient

$$\begin{aligned} J_{T,\Omega} &= (1 + \rho k^2) \frac{x_0^2}{\pi} \int_{t=0}^{t=T} \int_{s=-t\Omega}^{s=t\Omega} \frac{t}{s} e^{2(\alpha+k)t} \sin 2s \frac{ds}{t} dt \\ &= (1 + \rho k^2) \frac{x_0^2}{\pi} \int_0^T e^{2(\alpha+k)t} \int_{-t\Omega}^{t\Omega} \frac{\sin 2s}{s} ds dt \end{aligned}$$

On peut vérifier que la fonction  $\frac{\sin 2s}{s}$  est paire, donc symétrique par rapport à l'axe Oy. Il en résulte

$$\begin{aligned} J_{T,\Omega} &= (1 + \rho k^2) \frac{x_0^2}{\pi} \int_0^T e^{2(\alpha+k)t} 2 \left( \int_0^{t\Omega} \frac{\sin 2s}{s} ds \right) dt \\ &= 2(1 + \rho k^2) \frac{x_0^2}{\pi} \int_0^T e^{2(\alpha+k)t} \left( \int_0^{t\Omega} \frac{\sin 2s}{s} ds \right) dt \end{aligned}$$

On va introduire un nouveau changement de variable  $y = 2s$  pour obtenir

$$\begin{aligned} J_{T,\Omega} &= 2(1 + \rho k^2) \frac{x_0^2}{\pi} \int_0^T e^{2(\alpha+k)t} \left( \int_0^{2t\Omega} \frac{\sin y}{y} dy \right) dt \\ &= 2(1 + \rho k^2) \frac{x_0^2}{\pi} \int_0^T e^{2(\alpha+k)t} \text{Si}(2t\Omega) dt \end{aligned} \quad (3.27)$$

où  $\text{Si}(x) \triangleq \int_0^x \frac{\sin y}{y} dy$  (voir par exemple, [Kreyszig, 2005](#), pp. 509 et pp. A65, et la fonction *sinint* sous Matlab).

### Calcul du critère de minimisation de type LQR classique.

À partir de la connaissance des solutions  $x(\tau)$  cf. [équation \(3.25\)](#), où le contrôleur est déjà pris en compte cf. [\(3.24\)](#), le critère LQR sur un horizon temporel vers l'infini, revient à calculer [\(3.22\)](#) où on fait tendre  $T \rightarrow \infty$  et  $\Omega \rightarrow \infty$ . La théorie du contrôle optimal linéaire (LQR) nous assure la garantie de la stabilité en boucle fermée.

$$\begin{aligned} J_{T=\infty}^{\Omega=\infty}(k) &= \int_0^\infty x(t)^2 + \rho u(t)^2 dt = (1 + \rho k^2) \int_0^\infty x(t)^2 dt \\ &= (1 + \rho k^2) x_0^2 \int_0^\infty e^{2(\alpha+k)t} dt \\ &= -\frac{x_0^2}{2} \frac{1 + \rho k^2}{\alpha + k} \quad \text{sous l'hypothèse que } \alpha + k^* < 0 \Leftrightarrow k^* < -\alpha \\ &\quad (\text{pour assurer la stabilité et la convergence de l'intégrale}) \end{aligned}$$

Et si on dérive cette relation par rapport à  $k$  et que l'on cherche ensuite le zéro, nous trouverons la valeur optimale, soit  $k^*$ .

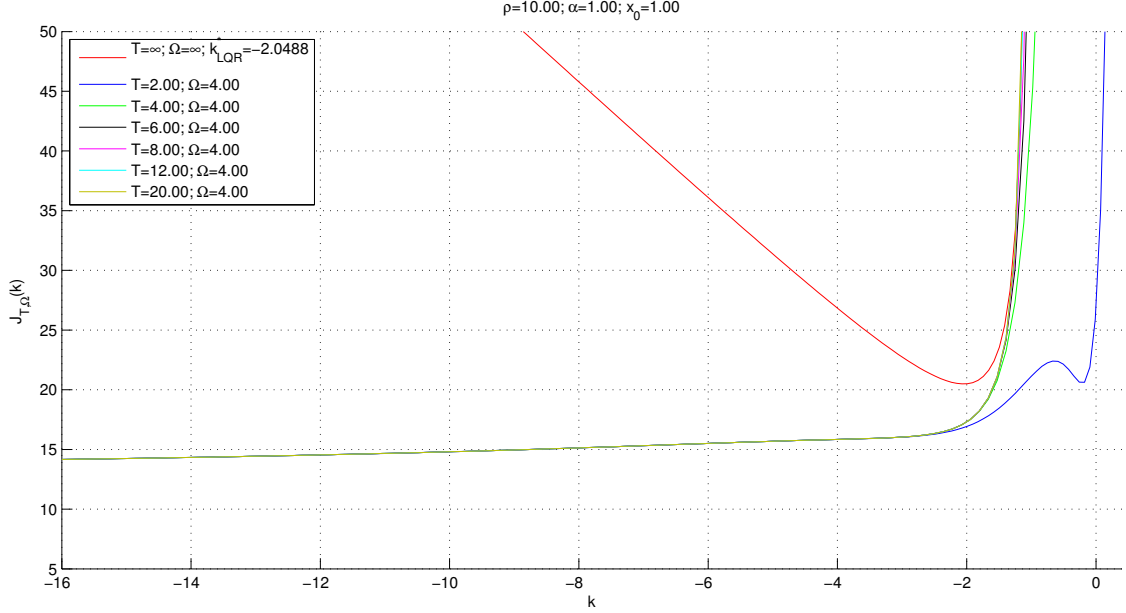
$$\begin{aligned} \frac{dJ_{T=\infty}^{\Omega=\infty}}{dk}(k) &= -\frac{x_0^2}{2} \frac{2\rho\alpha k + \rho k^2 - 1}{(\alpha + k)^2} \\ \frac{dJ_{T=\infty}^{\Omega=\infty}}{dk}(k) &= 0 \Leftrightarrow \rho k^2 + 2\rho\alpha k - 1 = 0 \\ k_{1,2}^* &= -\alpha \pm \frac{\sqrt{\rho^2\alpha^2 + \rho}}{\rho} \end{aligned}$$

Enfin, on garde la valeur négative de plus grande valeur absolue, qu'on va appeler  $k_{\text{LQR}}^*$ . Cette dernière va apparaître sur l'ensemble des figures ci-après, comme moyen de comparaison qualitative des résultats.

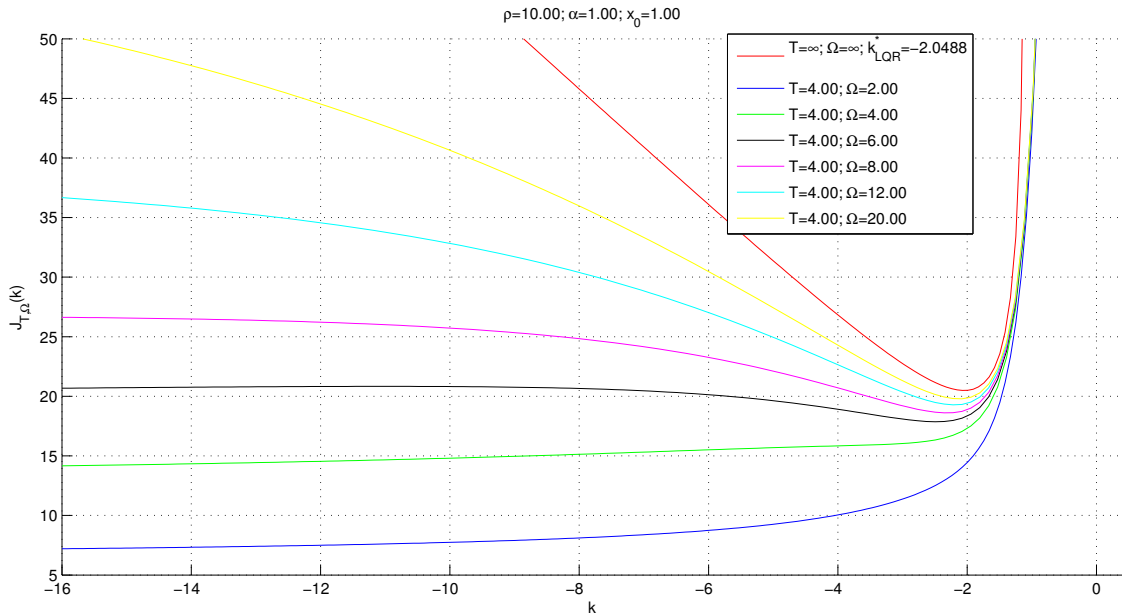
**Simulations.** Les [figures 3.9 à 3.12](#) portent sur l'allure des fonctions coût  $J_{T,\Omega}(k)$  en faisant varier les valeurs de  $T$  et  $\Omega$ . Dans la [figure 3.9](#), on ne fait varier que la largeur de l'horizon temporel d'intégration  $T$  et on garde une valeur fixée pour l'horizon fréquentiel; dans la [figure 3.10](#) c'est l'opposée, on garde une valeur constante de l'horizon temporel et on modifie la largeur de la bande fréquentielle. Dans la [figure 3.11](#) on effectue un zoom pour montrer que les fonctions coût sont non-convexes et enfin, dans la [figure 3.12](#) on fait varier en même temps l'horizon temporel et fréquentiel.

L'interprétation de ces courbes suit. On peut espérer de trouver un minimum local, si l'on part d'une solution initiale située dans le voisinage, par exemple, de

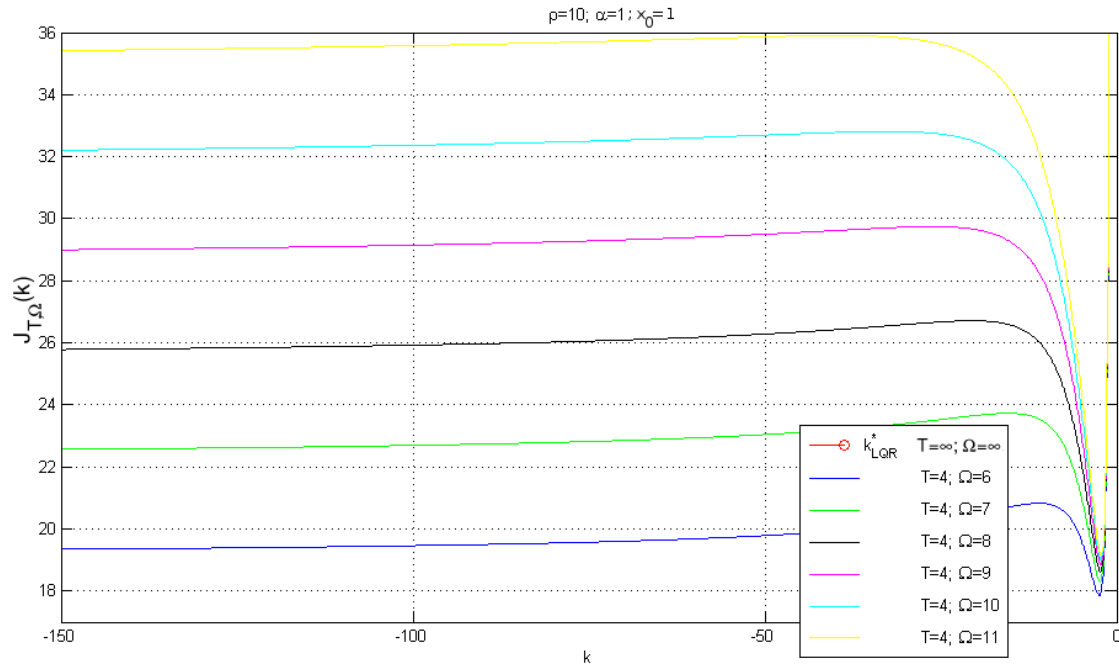
la solution donnée par LQR et si les pavés temps-fréquence sont « suffisamment grands ». En revanche, les courbes bleues sur l'ensemble des figures 3.9 à 3.12 suggèrent qu'on peut s'attendre que la solution s'échappe à  $-\infty$ . En d'autres termes, cette stratégie de contrôle n'aboutit pas vers la synthèse d'une loi de commande valide.



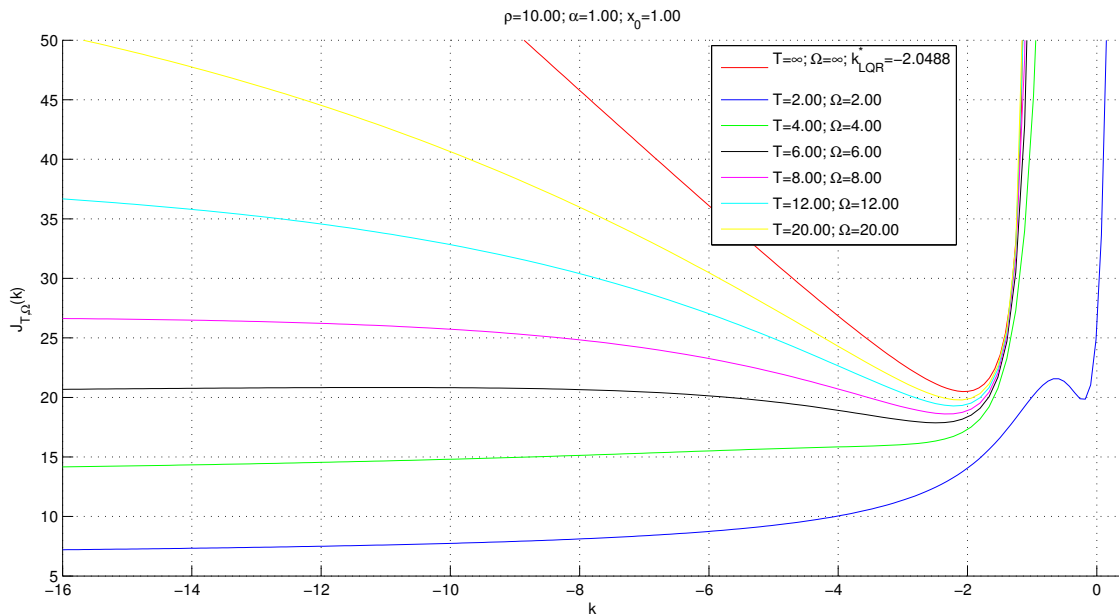
**Figure 3.9** – Fonction coût  $J_{T,\Omega} = J_{T,\Omega}(k)$  cf. (3.27) ; système en boucle fermée constitué des équations (3.23) et (3.24)



**Figure 3.10** – Fonction coût  $J_{T,\Omega} = J_{T,\Omega}(k)$  cf. (3.27) ; système en boucle fermée constitué des équations (3.23) et (3.24)



**Figure 3.11** – Fonction coût  $J_{T,\Omega} = J_{T,\Omega}(k)$  cf. (3.27) analysée sur un domaine plus large que celui indiqué sur l'axe des abscisses des figures 3.9 et 3.10 ;  $k_{LQR}^* = -2.0488$  ; système en boucle fermée constitué des équations (3.23) et (3.24)



**Figure 3.12** – Fonction coût  $J_{T,\Omega} = J_{T,\Omega}(k)$  cf. (3.27) ; système en boucle fermée constitué des équations (3.23) et (3.24)

**Étude sur une EDO du 2<sup>e</sup> ordre** Soit

$$\ddot{x} + p\dot{x} + qx = u \quad (3.28)$$

où  $p, q \in \mathbb{R}$  ; les conditions initiales sont données par  $x(0) = x_0$  et  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ . Celle-ci peut être réécrite sous la forme d'un système linéaire invariant dans le temps

d'ordre 2,

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} + B u, \quad (3.29)$$

où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -q & -p \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On cherche la commande stationnaire

$$u(x, \dot{x}) = K \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix} = (k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}, \quad (3.30)$$

qui assure la stabilité de cette équation.

Une fois de plus, il s'agit d'une étude de faisabilité concernant l'utilisation du critère temps-fréquence (3.22) à base de DWV, pour la synthèse de lois de commande optimales.

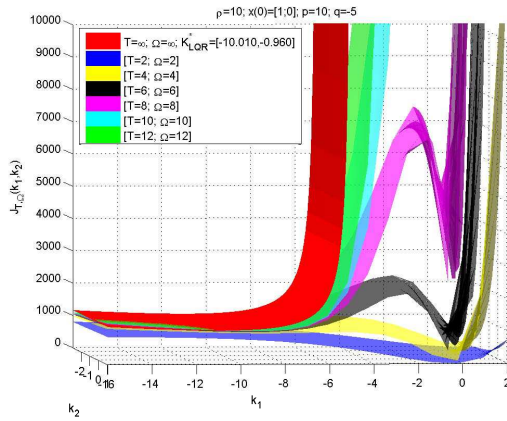
Le même genre de calculs que pour le cas précédent nous permet d'obtenir la formule explicite de  $J_{T,\Omega}$ , détails qui ne seront pas présentés dans ce mémoire de thèse.

**Simulations.** Pour illustrer les résultats de simulation de la figure 3.13, nous avons fixé les conditions initiales  $x_0 = 1$  et  $\dot{x}_0 = 0$ , et les paramètres  $p = 10$  et  $q = -5$  qui correspondent à l'équation (3.28) instable en boucle ouverte.

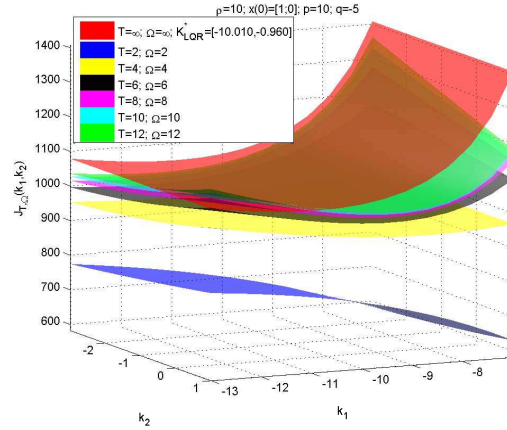
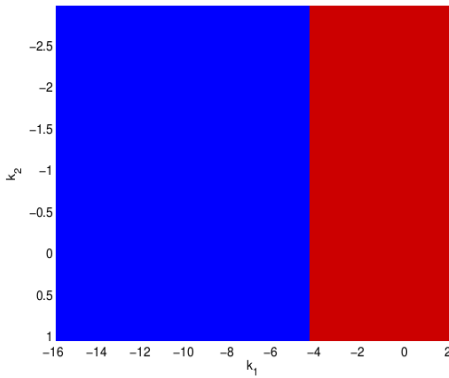
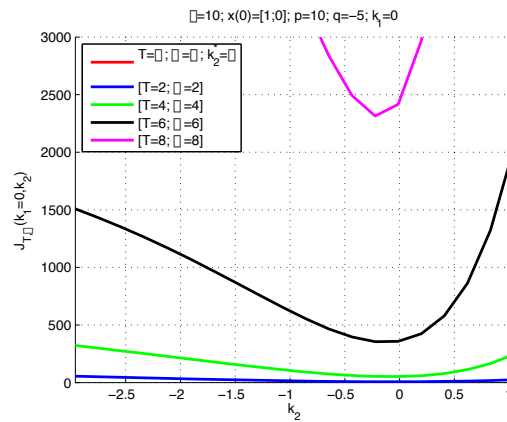
On se pose la question de savoir si par la minimisation de fonctions critères (3.22) il est possible de stabiliser ce système en boucle fermée. En jouant sur la taille du « pavé » temps-fréquence, on voit dans la figure 3.13a l'apparition de plusieurs minima locaux (sauf pour le cas du critère LQR où le minimum est unique), dont quelques-uns dans une zone où le système est instable en boucle fermée cf. figure 3.13c. Ce constat nous fait penser que pour des systèmes de dimension plus grande le choix du bon minimum sera une difficulté. Peut-être qu'une bonne pratique est de restreindre dans un premier temps la recherche de minima uniquement dans le sous-espace où le système en boucle fermée est stable. Uniquement à partir de la figure 3.13b qui représente un zoom autour du minimum donné par la méthode LQR, il est difficile de conclure que ces minima locaux existent pour toutes les surfaces. On peut s'attendre au phénomène où le minimum tend vers l'infini. Enfin, la figure 3.13d constitue une « coupe » des surfaces de la figure 3.13a par un plan qui passe par  $k_1 = 0$ . Malgré le fait qu'on se place dans une zone où le système en boucle fermée est instable, des minima locaux de la fonction critère existent.

On retrouve les mêmes difficultés techniques rencontrées dans le cas précédent de l'EDO du premier ordre : ces fonctions critère sont non convexes d'où l'existence de plusieurs minima locaux dont quelques-uns qui ne sont pas stabilisants, et l'échappement des solutions vers l'infini pour des « pavés » temps-fréquence qui sont trop petites.

De façon générale, il est assez difficile de conclure sur l'utilisation de cette méthodologie pour la synthèse de lois de commande optimales pour des cas simples (dont ceux qui ont été présentés ci-haut), aussi bien que pour des systèmes linéaires d'ordre supérieur. Concernant ces derniers, il est à noter que la formule explicite du critère (3.22) peut être calculée en utilisant la décomposition des trajectoires



(a) fonctions coût

(b) zoom sur la figure de gauche autour de  $K_{LQR}^*$ (c) Analyse de la stabilité en boucle fermée dans le plan  $(k_1, k_2)$  : bleu=zone stable, rouge=zone instable(d) Analyse du cas particulier où  $k_1 \equiv 0$  et donc  $u = k_2 \dot{x}$ 

**Figure 3.13** – Allure des fonctions coût  $J_{T,\Omega}(k_1, k_2)$  cf. (3.22) pour un système linéaire de deuxième ordre en boucle fermée (3.29)-(3.30), contrôlé par  $u = (k_1 \ k_2) \begin{pmatrix} x \\ \dot{x} \end{pmatrix}$

du système sur la base des vecteurs propres, ce qui permettra ensuite l'analyse numérique, voire l'utilisation d'algorithmes d'optimisation numériques. Pour que la minimisation du critère (3.22) ait du sens, il faut garantir l'existence d'un mino- rant : la seule information que nous avons trouvé dans la littérature porte sur une conjecture mentionnée dans l'article de [Cartwright, 1976](#), spécifiant des conditions suffisantes sur  $T$  et  $\Omega$ . En revanche, d'après l'article de [Cohen, 1989](#), pp. 971, il semblerait que cette conjecture ne soit pas valide (pourtant, signalons que nous n'avons pas pu identifier des contre-exemples concrets ni dans la littérature, ni lors de nos calculs numériques). C'est pourquoi, une autre piste est de chercher ailleurs d'autres candidats pour des fonctions coût temps-fréquence. Par exemple, la positivité de la convolution de la DWV avec des gaussiennes est un résultat connu [Cartwright, 1976](#). Par rapport au travail que nous avons effectué dans cette section, l'utilisation de ces fonctions a l'inconvénient de nous faire perdre les propriétés de « marginales », d'où la perte de la possibilité de comparer les résultats en termes de fonctions critère temps-fréquence avec celles de la méthode LQR.

Pour finir, reconnaissons simplement que l'utilisation des outils temps-fréquence pour résoudre le problème présenté dans la [section 1.3.2](#) reste une question ouverte.



### 3.3 Preuve du **théorème 3.1**

Comme on sait, la stabilité UGAS de l'origine  $x = 0$  pour le système nominal signifie l'existence de 3 fonctions,  $\gamma_i$  où  $i = 1, 2, 3$ , dites de classe  $\mathcal{K}^\infty$  (voir [Corless et Leitmann, 1981](#), pp. 1140) telles que :  $\forall x$ ,

$$\gamma_1(\|x\|) \leq V(x) \leq \gamma_2(\|x\|),$$

et

$$L_f V(x) \leq -\gamma_3(\|x\|).$$

La dérivée de  $V(x)$  le long des trajectoires du système incertain s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \left( \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right)' \dot{x} \\ &= \left( \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right)' (f(x) + g(x)(u + \delta(t, x, u))) \\ &= L_f V(x) + L_g V(x)u + L_g V(x)\delta \\ &= \begin{cases} L_f V(x) - \|L_g V(x)\|\rho(x) + L_g V(x)\delta, & \text{si } L_g V(x) \neq 0 \\ L_f V(x), & \text{sinon} \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} L_f V(x) - \|L_g V(x)\|\rho(x) + \|L_g V(x)\|\delta^{\max}, & \text{si } L_g V(x) \neq 0 \\ -\gamma_3(\|x\|), & \text{sinon} \end{cases} \\ &\leq \begin{cases} L_f V(x) - \|L_g V(x)\|(\rho(x) - \delta^{\max}), & \text{si } L_g V(x) \neq 0 \\ -\gamma_3(\|x\|), & \text{sinon} \end{cases} \\ &\leq -\gamma_3(\|x\|). \end{aligned}$$

Dans les inégalités précédentes on a utilisé les hypothèses de bornitude de  $\delta$  et de minoration de  $\rho$ . Ce qui montre que  $V(x)$  est également une fonction de Lyapunov pour la stabilité UGAS de l'origine du système incertain.

Pour prouver que la commande

$$u^*(x) = \begin{cases} -\frac{(L_g V(x))'}{\|L_g V(x)\|} \rho(x), & \text{si } L_g V(x) \neq 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (3.31)$$

est optimale pour le critère (3.4)

$$J(u) = \int_0^\infty l(x, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} u' u \, dt, \quad (3.32)$$

on vérifie que  $J(u^* + v)$  est minimal uniquement en  $v \equiv 0$ .

Étape 1) Soit

$$u = u^* + v \quad (3.33)$$

où  $v$  est arbitraire, parmi la famille de fonctions qui assurent la stabilisation UGAS du système

$$\dot{x} = f(x) + g(x)(u^* + v + \delta) \quad (3.34)$$

c'est-à-dire que

$$\lim_{T \rightarrow \infty} x(T) = 0 \quad (3.35)$$

Il est à noter que dans ce cas le critère d'optimalité a du sens, notamment concernant la borne en temps à  $+\infty$ .

Si on remplace (3.33) dans (3.32), on obtient :

$$\begin{aligned} J &= \int_0^\infty l(x, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} u' u \, dt \\ &= \int_0^\infty l(x, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} (u^* + v)' (u^* + v) \, dt \\ &= \underbrace{\int_0^\infty l(x, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} u^{*'} u^* + \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} u^{*'} v \, dt}_{I_1} + \underbrace{\frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} v' v \, dt}_{I_2} \end{aligned} \quad (3.36)$$

Étape 2. Calcul de  $I_1$ .

Le calcul de  $I_1$  sera effectué par rapport à chacune des deux branches de  $u^*(x)$  dans (3.31). Par la suite, nous allons remplacer dans l'expression de  $I_1$ , la valeur explicite de  $u^*(x)$  de (3.31), et aussi  $l(x, \delta)$  de (3.3).

Situation I.  $L_g V(x) \neq 0$

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty l(x, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} u^{*'} u^* + \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} u^{*'} v \, dt \\ &= \int_0^\infty -L_f V(x) + \|L_g V(x)\| \rho(x) - L_g V(x) v - L_g V(x) \delta \, dt \\ &= \int_0^\infty -L_f V(x) - L_g V(x) u^* - L_g V(x) v - L_g V(x) \delta \, dt \\ &= \int_0^\infty -L_f V(x) - L_g V(x) (u^* + v + \delta) \, dt \\ &= \int_0^\infty - \left( \frac{\partial V}{\partial x}(x) \right)' (f + g(u^* + v + \delta)) \, dt \end{aligned}$$

On observe que la dernière relation fait apparaître, à l'intérieur de l'intégrale, la dérivée de la fonction  $V(x)$  le long des trajectoires du système (3.34), que nous allons noter par  $\dot{V}(x(t))$ . Alors,

$$\begin{aligned} I_1 &= - \int_0^\infty \dot{V}(x(t)) \, dt \\ &= - \left[ \lim_{T \rightarrow \infty} V(x(T)) - V(x(0)) \right] \\ &= V(x(0)) \end{aligned}$$

où nous avons utilisé la relation (3.35).

Situation II.  $L_g V(x) = 0$

Dans cette situation,  $u^* = 0$  et (3.3) devient  $l(x, \delta) = -L_f V(x)$ . Effectuons le calcul de  $I_1$  :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^\infty l(x, \delta) + \frac{1}{2} \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} u^{*'} u^* + \frac{\|L_g V(x)\|}{\rho(x)} u^{*'} v \, dt \\ &= \int_0^\infty l(x, \delta) \, dt \\ &= \int_0^\infty -L_f V(x) \, dt \end{aligned}$$

et parce que  $L_g V(x) = 0$ , on peut ajouter la quantité  $-L_g V(x)(u^* + v + \delta)$  à l'intérieur de l'intégrale pour retrouver les mêmes opérations que dans la situation précédente.

Ayant obtenu le même résultat pour les deux situations, continuons la preuve.

Étape 3. Analyse de  $I_2$

$I_2$  représente l'intégrale d'une fonction quadratique en  $v$  multiplié par  $\|L_g V(x)\|/\rho(x)$  qui est toujours  $\geq 0$ . C'est pourquoi, son minimum par rapport à  $v$  est atteint quand  $v \equiv 0$ .

Étape 4. Conclure

$$V(x(0)) = \min_u J \quad \text{et} \quad u^* = \arg \min_u J$$

En d'autres termes, ceci conclut que  $u^*$  donné par (3.31) est optimal par rapport au critère  $J$  et que  $V(x(0))$  est la valeur optimale de ce critère.

### 3.4 Preuve du théorème 3.2

Tout d'abord remarquons que la commande  $c_A(x)$  est bien une fonction *continue* de l'état du système. Cela vient d'un résultat général disant que la fonction  $\max(f, g)$  de 2 fonctions continues est continue.

On considère la fonction suivante

$$V(x) = x' P x \tag{3.37}$$

dont la dérivée le long des trajectoires du systèmes est

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}' P x + x' P \dot{x} \\ &= \left( (A + \Delta A(t)) x + f(x, \nu) + (B(x) + \Delta B(t, x, \nu)) c_A(x) + D \nu \right)' P x \\ &\quad + x' P \left( (A + \Delta A(t)) x + f(x, \nu) + (B(x) + \Delta B(t, x, \nu)) c_A(x) + D \nu \right) \\ &= x' (P A + A' P) x + x' (P \Delta A(t) + (P \Delta A(t))') x + 2x' P f(x, \nu) \\ &\quad + 2x' P B(x) c_A(x) + 2x' P \Delta B(t, x, \nu) c_A(x) + 2x' P D \nu \\ &= -x' Q x + 2x' P \Delta A(t) x + 2x' P f(x, \nu) + 2x' P B(x) c_A(x) \\ &\quad + 2x' P \Delta B(t, x, \nu) c_A(x) + 2x' P D \nu \end{aligned}$$

Dans les cas où  $\|B(x)'P x\| \geq \varepsilon$  on a

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= -x'Qx + 2x'P \Delta A(t) x + 2x'P f(x, \nu) \\
&\quad - 2(-x'PB(x)) \max\left(\mathbf{0}_{m \times 1}, -\frac{B(x)'P x}{\|B(x)'P x\|} \rho(x)\right) \\
&\quad + 2x'P \Delta B(t, x, \nu) \max\left(\mathbf{0}_{m \times 1}, -\frac{B(x)'P x}{\|B(x)'P x\|} \rho(x)\right) + 2x'PD\nu \\
&= -x'Qx + 2x'P \Delta A(t) x + 2x'P f(x, \nu) \\
&\quad + 2x'P \Delta B(t, x, \nu) \max\left(\mathbf{0}_{m \times 1}, -B(x)'P x\right) \frac{\rho(x)}{\|B(x)'P x\|} \\
&\quad + 2x'PD\nu
\end{aligned}$$

car

$$\langle v, \max(\mathbf{0}_{m \times 1}, v) \rangle \geq 0$$

pour tout vecteur  $v$ . Par suite, en utilisant l'inégalité de Schwarz, on a

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &\leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\Delta A^{\max}\|x\|^2 + 2\|x\|\lambda_{\max}(P)f^{\max} \\
&\quad + 2\|x\|\|P\|\Delta B^{\max}\left\|\max\left(\mathbf{0}_{m \times 1}, -B(x)'P x\right)\right\| \frac{\rho(x)}{\|B(x)'P x\|} \\
&\quad + 2\lambda_{\max}(P)\|x\|\|D\|\nu^{\max} \\
&\leq -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\Delta A^{\max}\|x\|^2 + 2\|x\|\lambda_{\max}(P)f^{\max} \\
&\quad + 2\|x\|\|P\|\Delta B^{\max}\rho(x) + 2\lambda_{\max}(P)\|x\|\|D\|\nu^{\max}
\end{aligned}$$

car

$$\|\max(\mathbf{0}_{m \times 1}, v)\| \leq \|v\|$$

pour tout vecteur  $v$ . Ainsi

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &\leq -\left(\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\max}(P)\Delta A^{\max}\right)\|x\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_{\max}(P)\left(f^{\max} + \Delta B^{\max}\rho^{\max} + \|D\|\nu^{\max}\right)\|x\|
\end{aligned}$$

Dans les cas où  $\|B(x)'P x\| < \varepsilon$  on a

$$\begin{aligned}
\dot{V}(x) &= -x'Qx + 2x'P \Delta A(t) x + 2x'P f(x, \nu) \\
&\quad - 2(-x'PB(x)) \max\left(\mathbf{0}_{m \times 1}, -\frac{B(x)'P x}{\varepsilon} \rho(x)\right) \\
&\quad + 2x'P \Delta B(t, x, \nu) \max\left(\mathbf{0}_{m \times 1}, -\frac{B(x)'P x}{\varepsilon} \rho(x)\right) \\
&\quad + 2x'PD\nu.
\end{aligned}$$

Les mêmes arguments que dans le cas  $\|B(x)'P x\| \geq \varepsilon$  permettent d'obtenir pareillement au cas précédent

$$\begin{aligned}
\dot{V} &\leq -\left(\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\max}(P)\Delta A^{\max}\right)\|x\|^2 \\
&\quad + 2\lambda_{\max}(P)\left(f^{\max} + \Delta B^{\max}\rho^{\max} + \|D\|\nu^{\max}\right)\|x\|.
\end{aligned}$$

Par conséquent, la fonction  $V(x) = x' P x$  vérifie sur  $\mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\left(\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\max}(P) \Delta A^{\max}\right)\|x\|^2 \\ & + 2\lambda_{\max}(P)\left(f^{\max} + \Delta B^{\max} \rho^{\max} + \|D\|\nu^{\max}\right)\|x\|. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Le second membre de cette dernière inégalité est strictement négatif pour tous les  $x \in \mathbb{R}^n$  tels que

$$\|x\| > \mu_0$$

où

$$\begin{aligned} \mu_0 &= \frac{2\lambda_{\max}(P)\left(f^{\max} + \Delta B^{\max} \rho^{\max} + \|D\|\nu^{\max}\right)}{\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\max}(P) \Delta A^{\max}} \\ &= \frac{f^{\max} + \Delta B^{\max} \rho^{\max} + \|D\|\nu^{\max}}{\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} - \Delta A^{\max}} \end{aligned} \quad (3.39)$$

ce qui est possible grâce à l'hypothèse

$$\Delta A^{\max} < \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}$$

du [théorème 3.2](#).

En utilisant une nouvelle fois la relation

$$\lambda_{\min}(P)\|x\|^2 \leq V(x) \leq \lambda_{\max}(P)\|x\|^2, \quad (3.40)$$

l'inégalité (3.38) peut se mettre sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{V} \leq & -\frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\max}(P) \Delta A^{\max}}{\lambda_{\max}(P)} V(x) \\ & + \frac{2\lambda_{\max}(P)\left(f^{\max} + \Delta B^{\max} \rho^{\max} + \|D\|\nu^{\max}\right)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \sqrt{V(x)} \end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned} \frac{\dot{V}}{\sqrt{V}} \leq & -\frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\max}(P) \Delta A^{\max}}{\lambda_{\max}(P)} \sqrt{V} \\ & + \frac{2\lambda_{\max}(P)\left(f^{\max} + \Delta B^{\max} \rho^{\max} + \|D\|\nu^{\max}\right)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \end{aligned}$$

Cette inégalité est de la forme

$$2\dot{y} \leq -\alpha y + \beta$$

qui implique

$$y(t) \leq y(t_0) e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}\right).$$

D'où

$$\sqrt{V(t)} \leq \sqrt{V(t_0)} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} + \frac{\beta}{\alpha} \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}\right)$$

où

$$\alpha = \frac{\lambda_{\min}(Q) - 2\lambda_{\max}(P) \Delta A^{\max}}{\lambda_{\max}(P)} = 2 \left( \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} - \Delta A^{\max} \right)$$

et

$$\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \mu_0 ,$$

ou encore, en utilisant l'inégalité de gauche de (3.40),

$$\|x(t)\| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} \sqrt{V(t_0)} e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)} + \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \mu_0 \left(1 - e^{-\frac{\alpha}{2}(t-t_0)}\right)$$

soit en réarrangeant les termes,

$$\|x(t)\| \leq \left( \frac{\sqrt{V(t_0)}}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)}} - \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \mu_0 \right) e^{-d_1(t-t_0)} + \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \mu_0 \quad (3.41)$$

ce qui permet de dire que les trajectoires démarrant à l'extérieur de la boule de centre l'origine et de rayon

$$b_0 = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \mu_0$$

convergent en norme euclidienne exponentiellement vers cette même boule à la vitesse

$$d_1 = \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} - \Delta A^{\max} .$$

Pour tout  $b > b_0$ , les trajectoires démarrant à l'extérieur de la boule de centre l'origine et de rayon  $b$  mettent un temps

$$T = \frac{2}{\alpha} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{V(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}} - b_0}{b - b_0} \right) + t_0$$

pour atteindre cette même boule de rayon  $b$ . On notera que la condition

$$\|x(t_0)\| \geq b$$

implique que la quantité

$$\sqrt{\frac{V(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}} - b_0$$

apparaissant dans le logarithme ci-dessus est bien strictement positive.

### 3.5 Preuve du corollaire 3.3

Un calcul direct du spectre de plancher peut être mené à partir de :

$$y(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_{t_0}^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) \ddot{z}_{a1}(\tau) d\tau ,$$

où  $\ddot{z}_{a1}(\tau)$  est l'accélération absolue de la base. Voir (1.8) et (1.10) pour plus de détails sur la définition et le calcul du spectre de plancher.

On a

$$|y(t)| \leq \frac{1}{\omega_d} \int_{t_0}^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} |\sin(\omega_d(t-\tau))| |\ddot{z}_{a1}(\tau)| d\tau$$

où la fonction sinus est majorée par la valeur 1 pour retrouver

$$|y(t)| \leq \frac{1}{\omega_d} \int_{t_0}^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} |\ddot{z}_{a1}(\tau)| d\tau \quad (3.42)$$

Un majorat de  $\ddot{z}_{a1}(\tau)$  est calculé de la façon suivante. Réécrivons l'équation dynamique de la base :

$$\ddot{z}_{a1}(\tau) = \frac{1}{m_b} \begin{pmatrix} -(k_b + k_s) & k_s & -(c_b + c_s + c_A(\tau)) & c_s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_{r1}(\tau) \\ z_{r2}(\tau) \\ \dot{z}_{r1}(\tau) \\ \dot{z}_{r2}(\tau) \end{pmatrix} - \frac{\mu F_N}{m_b} \text{sign}(\dot{z}_{r1}(\tau))$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned} |\ddot{z}_{a1}(\tau)| &\leq \frac{1}{m_b} \|v_1\| \|x(\tau)\| + \frac{\mu F_N}{m_b} |\text{sign}(\dot{z}_{r1})| \\ &\leq \frac{1}{m_b} \|v_1\| \|x(\tau)\| + \frac{\mu F_N}{m_b} \end{aligned} \quad (3.43)$$

où

$$v_1' = \begin{pmatrix} -(k_b + k_s) & k_s & -(c_b + c_s + c_A^{\max}) & c_s \end{pmatrix},$$

et où

$$x(\tau) = \begin{pmatrix} z_r(\tau) \\ \dot{z}_r(\tau) \end{pmatrix} \quad (3.44)$$

est le vecteur des coordonnées relatives (position et vitesse) d'une structure à  $n$  DDL, à savoir l'état du système

$$\dot{x} = Ax + f(x) + B(x) c_A + D \nu, \quad x(t_0) = x_0, \quad (3.45a)$$

où

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 0_n & 1_n \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ -M^{-1}E(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ -\frac{\mu F_N}{m_b} \text{sign}(\dot{z}_{r1}) \\ 0_{(n-1) \times 1} \end{pmatrix}, \\ B(x) &= \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ -e_{n+1}' x / m_b \\ 0_{(n-1) \times 1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ -\dot{z}_{r1} / m_b \\ 0_{(n-1) \times 1} \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 0_{n \times 1} \\ -1_{n \times 1} \end{pmatrix}, \nu = \ddot{x}_g. \end{aligned} \quad (3.45b)$$

$M$ ,  $C$  et  $K$  sont les matrices de masse, d'amortissement et de rigidité, respectivement.  $E(x)$  définit la position de la force de frottement dans la géométrie de la structure.

La preuve du [théorème 3.2](#) et notamment la relation (3.41) nous permet de calculer une borne sur  $\|x(\tau)\|$ ,

$$\|x(\tau)\| \leq \max \left( \sqrt{\frac{x(t_0)'Px(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}}, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\mu_0 \right)$$

où, le calcul de  $\mu_0$  est fait à partir de (3.39),

$$\mu_0 = \frac{\frac{\mu F_N}{m_b} + \sqrt{n} \ddot{x}_g^{\max}}{\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}}.$$

En utilisant cette relation, un nouveau majorant de (3.43) est donné par

$$|\ddot{z}_{a1}(\tau)| \leq \frac{1}{m_b} \|v_1\| \max \left( \sqrt{\frac{x(t_0)'Px(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}}, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\mu_0 \right) + \frac{\mu F_N}{m_b},$$

ce qui permet de poursuivre les calculs des inégalités dans (3.42) par une nouvelle majoration

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \frac{1}{\omega_d} \frac{1}{m_b} \left( \|v_1\| \max \left( \sqrt{\frac{x(t_0)'Px(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}}, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\mu_0 \right) + \mu F_N \right) \int_{t_0}^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} d\tau \\ &\leq \frac{1}{\omega_d} \frac{1}{m_b} \left( \|v_1\| \max \left( \sqrt{\frac{x(t_0)'Px(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}}, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\mu_0 \right) + \mu F_N \right) \frac{1}{\zeta\omega} [1 - e^{-\zeta\omega(t-t_0)}] \\ &\leq \frac{1}{m_b} \frac{1}{\omega^2} \frac{1}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \left( \|v_1\| \max \left( \sqrt{\frac{x(t_0)'Px(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}}, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\mu_0 \right) + \mu F_N \right) \end{aligned}$$

Enfin, la définition du spectre de plancher (1.8a) nous permet de calculer un majorant :

$$\begin{aligned} \text{PSA}_\zeta(\omega) &= \omega^2 \max_{t \geq t_0} |y(t)| \\ &\leq \frac{1}{m_b} \frac{1}{\zeta\sqrt{1-\zeta^2}} \left( \|v_1\| \max \left( \sqrt{\frac{x(t_0)'Px(t_0)}{\lambda_{\min}(P)}}, \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}\mu_0 \right) + \mu F_N \right) \end{aligned}$$

### 3.6 Preuve du corollaire 3.4

Nous allons utiliser le résultat général suivant, qui constitue un cas particulier de celui de [Isidori, 1995](#), Prop. 9.5.1, pp. 452. On considère un système dynamique en boucle fermée décrit par les [équations \(3.5\)](#) et (3.6) du [théorème 3.2](#), où la condition initiale est fixée à  $x(t_0) = 0_{2n \times 1}$ . Soit  $V(x) = x'Px$  définie par l'[équation \(3.37\)](#), et une fonction  $h(x)$  arbitrairement choisie par l'utilisateur. On suppose aussi l'existence d'un

- (i) majorant de  $\dot{V}(x)$ , noté par  $W(\|x\|, |\nu|)$ ,
- (ii) majorant de  $|h(x)|$ , noté par  $H(\|x\|)$ ,
- (iii) domaine  $S_x$ ,



et que la condition

$$W(\|x\|, |\nu|) + H(\|x\|) - \gamma^2 |\nu|^2 < 0, \quad \forall x \in S_x, \forall \nu. \quad (3.46)$$

soit vraie. Alors, nous allons montrer dans un premier temps que cette dernière implique

$$\int_{t_0}^t |h(x(\tau))| d\tau \leq \gamma^2 \int_{t_0}^t |\nu(\tau)|^2 d\tau, \quad (3.47)$$

ce qui nous permettra de calculer une borne sur le spectre de plancher. En particulier, la valeur de  $\gamma$  dépendra du choix des paramètres de la loi de commande.

Pour montrer que (3.46)  $\Rightarrow$  (3.47), observons que les deux majorations, et la relation (3.46), nous permettent d'écrire :

$$\dot{V}(x(\tau)) + |h(x(\tau))| - \gamma^2 |\nu(\tau)|^2 \leq W(\|x(\tau)\|, |\nu(\tau)|) + H(\|x(\tau)\|) - \gamma^2 |\nu(\tau)|^2 < 0,$$

pour toutes les trajectoires  $x(\tau) \in S_x$  et pour toutes les perturbations  $\nu(\tau)$ . En intégrant cette relation entre  $t_0$  et  $t$  par rapport à la variable  $\tau$ , on obtient

$$\int_{t_0}^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau + \int_{t_0}^t |h(x(\tau))| d\tau - \gamma^2 \int_{t_0}^t |\nu(\tau)|^2 d\tau < 0.$$

Sachant que

$$\int_{t_0}^t \dot{V}(x(\tau)) d\tau = V(x(t)) - V(x(t_0)) = V(x(t)) \geq 0,$$

on obtient

$$0 \leq V(x(t)) \leq - \int_{t_0}^t |h(x(\tau))| d\tau + \gamma^2 \int_{t_0}^t |\nu(\tau)|^2 d\tau$$

d'où la relation (3.47).

Pour pouvoir réduire la taille de cette preuve, nous allons faire référence directement aux résultats des preuves du [théorème 3.2](#) et du [corollaire 3.3](#).

Étape 1) Partir de la définition du spectre de plancher.

Reprenons les calculs du début de la preuve du [corollaire 3.3](#). À partir de (3.42) nous allons construire un majorant,

$$\begin{aligned} |y(t)| &\leq \frac{1}{\omega_d} \int_{t_0}^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} |\ddot{z}_{a1}(\tau)| d\tau \\ &\leq \frac{1}{\omega_d} \int_{t_0}^t |\ddot{z}_{a1}(\tau)| d\tau \end{aligned} \quad (3.48)$$

sachant que  $0 \leq e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \leq 1, \forall \tau \in [t_0, t]$ .

Soit  $h(x) = \ddot{z}_{a1}$ , où  $x$  est défini par l'équation (3.44) et représente le vecteur des variables d'état du système en coordonnées relatives (3.45).

Étape 2) Calculer un majorant de  $\dot{V}(x)$ , noté par  $W(\|x\|, |\nu|)$ .

Les calculs du début de la preuve du [théorème 3.2](#) nous permettent d'appliquer directement l'inégalité (3.38). On trouve

$$\dot{V}(x) \leq W(\|x\|, |\nu|) = -\lambda_{\min}(Q)\|x\|^2 + 2\lambda_{\max}(P)\frac{\mu F_N}{m_b}\|x\| + 2\lambda_{\max}(P)\sqrt{n}|\nu|\|x\| \quad (3.49)$$

(avec la seule différence que nous avons évité de majorer  $|\nu|$  par  $\nu^{\max}$ ).

Étape 3) Calculer un majorant de  $h(x)$ , noté par  $H(\|x\|)$ .

Nous allons utiliser directement la relation (3.43), pour trouver

$$|h(x(\tau))| \leq H(\|x\|) = \frac{1}{m_b} \|v_1\| \|x(\tau)\| + \frac{\mu F_N}{m_b} \quad (3.50)$$

Étape 3) Calcul d'une condition équivalente à (3.46) indépendante de  $\nu$ . Calcul de  $S_x$ .

En remplaçant les définitions (3.49) et (3.50) de  $W$  et  $H$ , respectivement, dans l'inégalité (3.46), on obtient un polynôme de degré 2 en l'indéterminée  $|\nu|$  :

$$\begin{aligned} & -\gamma^2 |\nu|^2 + 2 \lambda_{\max}(P) \sqrt{n} \|x\| |\nu| - \lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 \\ & + 2 \lambda_{\max}(P) \frac{\mu F_N}{m_b} \|x\| + \frac{1}{m_b} \|v_1\| \|x\| + \frac{\mu F_N}{m_b} < 0, \quad \forall x \in S_x, \forall \nu. \end{aligned}$$

En imposant à son discriminant d'être strictement négatif, on retrouve la condition équivalente :

$$\begin{aligned} & 4 (\lambda_{\max}(P))^2 n \|x\|^2 + 4\gamma^2 (-\lambda_{\min}(Q) \|x\|^2 \\ & + 2 \lambda_{\max}(P) \frac{\mu F_N}{m_b} \|x\| + \frac{1}{m_b} \|v_1\| \|x\| + \frac{\mu F_N}{m_b}) < 0, \quad \forall x \in S_x, \end{aligned}$$

qui ne dépend plus de  $\nu$ . On divise par  $4\gamma^2$  et on réarrange les termes pour retrouver une nouvelle fois un polynôme de degré 2, cette fois-ci en l'indéterminée  $\|x\|$  :

$$a \|x\|^2 + b \|x\| + c < 0, \quad \forall x \in S_x.$$

où

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{\gamma^2} (\lambda_{\max}(P))^2 n - \lambda_{\min}(Q), \\ b &= 2 \lambda_{\max}(P) \frac{\mu F_N}{m_b} + \frac{1}{m_b} \|v_1\|, \\ c &= \frac{\mu F_N}{m_b}. \end{aligned}$$

Observons que, par construction pour notre problème,  $b$  est strictement positif (parce que  $\|v_1\| > 0$ ) et  $c$  est positif. L'analyse habituelle des polynômes de degré 2, consiste à effectuer une classification selon les valeurs possibles de : (i)  $a$  (3 situations :  $a < 0$ ,  $a = 0$ , ou  $a > 0$ ) ; (ii)  $\Delta = b^2 - 4ac$  (3 situations :  $\Delta < 0$ ,  $\Delta = 0$ , ou  $\Delta > 0$ ) ; (iii)  $c$  (2 situations :  $c = 0$  et  $c > 0$ ). Cette analyse est restreinte qu'au demiplan de droite pour respecter la relation  $\|x\| > 0$ . Au final, on retient la solution

$$a < 0, \quad \text{et} \quad S_x = \left\{ x : \|x\| > \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \right\}. \quad (3.51)$$

Enfin, les deux conditions (3.51) permettent de garantir que la relation (3.46) soit vraie, c'est pourquoi on peut utiliser l'inégalité (3.47),

$$\int_{t_0}^t |\ddot{z}_{a1}(\tau)| d\tau \leq \gamma^2 \int_{t_0}^t |\nu(\tau)|^2 d\tau.$$

Étape 4) Calcul d'une borne supérieure du spectre de plancher, qui dépend explicitement de  $\omega$ .

En utilisant l'inégalité (3.48) et la définition du spectre de plancher (1.8a) il est possible de calculer un majorant :

$$\begin{aligned} \text{PSA}_\zeta(\omega) &= \omega^2 \max_{t \geq t_0} |y(t)| \\ &\leq \frac{\omega}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \gamma^2 \max_{t \geq t_0} \int_{t_0}^t |\nu(\tau)|^2 d\tau . \end{aligned}$$

# Conclusions et Perspectives

## Conclusions

Pour résumer, au vu de l'amélioration du comportement des structures industrielles et leurs équipements internes sensibles, cette thèse a eu pour but d'augmenter l'efficacité de l'isolation sismique par la base, et en particulier remédier certaines faiblesses dont l'amplification des modes supérieurs. Dans la continuité des travaux de recherche menés, ces dernières années, au laboratoire EMSI du Centre du CEA Saclay, nous avons mis l'accent sur la tenue sismique des équipements, par le biais de l'étude des spectres de plancher. D'où la différence par rapport à la majorité des travaux antérieurs sur l'isolation sismique mixte, qui portent principalement leur intérêt sur la réponse de la structure isolée (déplacements relatifs, accélérations absolues des étages, etc.) et non pas explicitement sur les spectres de plancher. Dans notre étude, ces derniers sont utilisés comme des critères d'évaluation de la pertinence des lois de commande élaborées pour contrôler ces systèmes dissipatifs.

Deux approches ont été étudiées : la première, classique en automatique, a consisté à poser un problème d'atténuation de perturbations et à proposer une solution de contrôle en partant des travaux de Leitmann et de ses collaborateurs. Les résultats ont été satisfaisants. La seconde, ayant un caractère plus exploratoire, consistait à intégrer les outils temps-fréquence et notamment la distribution de Wigner-Ville dans la synthèse de lois de commande. Ces travaux n'ont pas abouti à la proposition d'une méthodologie quant à leur utilisation en théorie, ni à leur applicabilité en pratique. Dans les lignes qui suivent, nous présentons une synthèse succincte et des conclusions sur les deux approches en commençant avec la première.

Nous avons formalisé un problème de contrôle semi-actif dans la [section 1.3.2](#) et l'ensemble des travaux de recherche présentés par la suite, dans les [chapitres 1](#) et [2](#), a servi d'outil (état de l'art, description de modèles de structures protégées contre les séismes par des systèmes d'isolation mixte, représentations de signaux sismiques) pour aboutir à la proposition d'une solution, dans le [chapitre 3](#). Les résultats formalisés par un théorème et ses corollaires portent sur des propriétés en boucle fermée : *uniform boundedness*, *uniform ultimate boundedness* et une borne supérieure (*i.e.* une enveloppe) sur le spectre de plancher. Ils ne sont pas directement applicables par l'ingénieur parce que : (i) les hypothèses de départ utilisées pour la construction de ce théorème sont très générales et en particulier, nous avons enlevé les *matching conditions* du cadre de Leitmann, (ii) les résultats sont calculés en utilisant la théorie de Lyapunov et prennent en compte le cas le plus pessimiste en terme d'incertitudes et de perturbations (*i.e.*, le signal sismique). C'est pourquoi, dans un second temps, en utilisant la théorie des vibrations et en partant de la loi de commande utilisée pour construire le théorème, nous nous sommes intéressés : (i) à la calibration de ses paramètres, et (ii) au choix de variables d'état.

Afin de paramétrer judicieusement la loi de commande, la description de la dynamique de la structure isolée à l'aide des coordonnées généralisées ou modales au lieu des coordonnées physiques présente un intérêt certain. Pour rappel, la projection du vecteur des coordonnées physiques sur une base modale permet de travailler en coordonnées généralisées ou modales. En partant de modèles de structures réduites à  $n$  degrés de liberté, nous avons analysé graduellement comment construire cette base modale, pour tenir compte de plusieurs hypothèses (du cas simple vers le cas général) sur  $M$ ,  $K$  et  $C$ . Il semble que l'inclusion de la matrice  $C$  dans la construction de cette base modale, ne traduit pas une croissance en performance des schémas de contrôle, pour cette classe de modèles de structures souples à la base.

L'état de l'art effectué ne met pas en évidence de réflexion sur le choix de la représentation en coordonnées physiques du système : les coordonnées relatives sont utilisées de façon systématique. En revanche, pour notre problème de contrôle les coordonnées absolues sont préférées pour plusieurs raisons : (i) le système dynamique décrit en coordonnées absolues fait apparaître toute la contribution de l'excitation sismique sur la même équation que celle de la loi de commande, ce qui suggère la possibilité d'avoir une action directe de la part de l'actionneur sur l'ensemble des excitations ; (ii) le découplage idéal est réalisé si les coordonnées absolues sont nulles, quel que soit le signal sismique ; en d'autres termes, la structure ne change pas sa position par rapport à un repère inertiel ; (iii) les résultats de simulation sur les structures à 2 DDL montrent une meilleure réduction du spectre de plancher même au-delà la fréquence du second mode de vibration. Pour aller un peu plus loin dans cette réflexion, les coordonnées généralisées absolues semblent également être un meilleur choix par rapport aux coordonnées généralisées relatives. Au vu des tableaux de synthèse du [chapitre 1](#), nous n'avons pas identifié de travaux dans la littérature qui les utilise afin de construire une solution aux problèmes de contrôle de structures.

Ce travail a permis un approfondissement de la physique du processus. Si on travaille en coordonnées généralisées réelles ou modales complexes (choix motivé par le souhait d'utiliser la matrice  $C$  dans la construction de la base modale), l'analyse des équations dynamiques de chaque mode d'indice  $i$  se réduit à l'analyse des équations de second ordre, comme il a été présenté dans la [section 2.1.1](#). Leur second membre est constitué par : (i) le signal sismique, et (ii) les autres coordonnées généralisées d'indice  $j \neq i$  par couplage des modes, où  $i, j = 1, \dots, n$ . Lorsque la matrice  $C$  est modale, il y a une simplification supplémentaire : les termes de couplage introduits par l'effet de la matrice  $C$  vont disparaître et ceux qui restent sont dûs aux non linéarités introduites par le dispositif non linéaire, à savoir le patin à frottement sec. Dans tous les cas, effectuer la synthèse de lois de commande avec pour objectif l'atténuation de la réponse du mode  $i$  aura comme conséquence indirecte une action sur tous les autres modes, par couplage. Au delà de cette analyse qualitative, il est difficile d'exprimer précisément comment la méthode de contrôle proposée va influencer les pics des spectres de plancher.

Les résultats de simulation illustrés dans le [chapitre 3](#) montrent des améliorations par rapport aux dispositifs passifs et assurent que : (i) la loi de commande proposée, dans la continuité des travaux de Leitmann, constitue un candidat solide au problème de contrôle semi-actif traité dans cette thèse, et (ii) les méthodes qui

ont été proposées pour calibrer cette loi de commande sont valides. Les modèles de structures isolées utilisées pour illustrer l'application des méthodes de contrôle sont simples à deux degrés de liberté, parce qu'ils représentent bien l'essentiel de la physique du processus. Cependant, ces méthodes de contrôle peuvent être facilement étendues aux cas plus généraux des modèles de structures à  $n$  degrés de liberté.

La seconde approche impliquant les outils temps-fréquence a été motivée par une meilleure prise en compte des composantes du régime transitoires des signaux d'entrée-sortie sur des systèmes dynamiques avec contrôle. La distribution de Wigner-Ville nous est apparue appropriée à la description de ces signaux, notamment du fait de ses propriétés d'intégrales marginales, permettant d'étendre la classe des fonctions coût quadratiques habituelles utilisées pour la synthèse de lois de commande linéaire optimale (LQR, en anglais). Cette dernière technique consiste à chercher les paramètres de la loi de commande en minimisant une fonction coût. Mais, appliquée au cas des fonctions coût à base de la distribution de Wigner-Ville (particulièrement intéressantes car elles offrent la possibilité de travailler dans le domaine temps-fréquence), nous avons identifié plusieurs inconvénients pour le contrôle. Le principal porte sur leur non convexité qui implique l'existence de plusieurs minima locaux, et qui : (i) ne sont pas tous stabilisants en boucle fermée ; (ii) peuvent s'échapper vers l'infini.

Enfin, l'utilisation des outils temps-fréquence pour la synthèse de lois de commande (stabilisantes, optimales, etc.) reste une question ouverte.

## Perspectives

L'objectif d'amélioration des spectres de plancher devrait être formalisé mathématiquement et inclus dans l'énoncé du problème de contrôle semi-actif. Ceci dit, dans nos travaux nous avons utilisé comme indication qualitative l'allure d'un spectre de réponse souhaité. Au lieu de cela, mieux vaut d'essayer à exprimer mathématiquement le conflit des pics, sous forme d'une fonction critère tel qu'une solution de contrôle puisse être calculée. Une avancée significative sera de pouvoir construire un critère à minimiser en terme de spectre de plancher et ensuite d'effectuer la synthèse de lois de commande optimales. La prise en compte de ce critère sera ainsi faite dès la phase de synthèse de la loi de commande.

Une autre question ouverte est de savoir comment distribuer de façon équilibrée les efforts entre la partie passive et celle semi-active du système d'isolation mixte. Par exemple, dans notre travail nous avons négligé l'effet non linéaire du patin à frottement sec tandis qu'il est raisonnable de penser que la loi de commande devrait en tenir compte.

Le choix de  $Q$  est fait à partir d'un seul terme qui apparaît dans la formule explicite de la dérivée de la fonction  $V$  le long des trajectoires du système : il s'agit du terme  $-x'Qx$ . Mais, il est possible que par un choix astucieux de ce terme, qui semble adapté à notre problème, le « bénéfice » exprimé par le taux de décroissance de  $\dot{V}$  soit perdu à cause des autres termes qui apparaissent également dans sa formule explicite. C'est pourquoi il faudra essayer de tenir compte de plusieurs de ces termes et notamment de celui responsable du couplage entre  $x$  et  $\nu$ . En ce

sens, la *S-procedure*, [Scruggs et Gavin, 2011](#), §30.4.2, constitue un point de départ intéressant.

Le modèle d'actionneur semi-actif utilisé dans ces travaux est assez général et assez simpliste. Pourtant, la réalité physique concernant la dynamique des actionneurs est plus complexe que celle étudiée ici. Une piste future est d'intégrer à la fois le temps de retard, [Pham, 2010](#), §6.5, mais aussi des incertitudes sur ce dernier dans la description de la dynamique du système à contrôler et ensuite passer à la synthèse de lois de commande. En particulier, dans cette situation tout le travail de synthèse du [chapitre 3](#), en commençant par le [théorème 3.2](#), devrait être réadapté.

Pour avancer vers la conception pratique, les aspects liés à la mise en œuvre devront être étudiés. Le choix des capteurs et des actionneurs réels est important. Enfin, l'expérimentation sur table vibrante demeure certainement une des étapes de validation indispensable avant d'envisager une utilisation industrielle systématique des systèmes de contrôle semi-actif pour la protection parasismique.

# Bibliographie

- [Adhikari et Yamaguchi, 1997] ADHIKARI, R. et YAMAGUCHI, H. (1997). Sliding mode control of buildings with ATMD. *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 26(4): 409–422.
- [Adhikari et al., 1998] ADHIKARI, R., YAMAGUCHI, H. et YAMAZAKI, T. (1998). Modal space sliding-mode control of structures. *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 27(11):1303–1314.
- [Agrawal et al., 2006] AGRAWAL, A. K., XU, Z. et HE, W. L. (2006). Ground motion pulse-based active control of a linear base-isolated benchmark building. *Struct. Control Health Monit.*, 13(2–3):792–808.
- [Allaire, 2007] ALLAIRE, G. (2007). *Numerical Analysis and Optimization : An Introduction to Mathematical Modelling and Numerical Simulation*. Oxford Univ. Press, New York.
- [Allaire, 2010] ALLAIRE, G. (2010). *Analyse numérique et optimisation : Une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique*. photocopié. École Polytechnique, Palaiseau, France.
- [Allen et Mills, 2004] ALLEN, R. L. et MILLS, D. W. (2004). *Signal Analysis : Time, Frequency, Scale and Structure*. Wiley-Interscience, Piscataway, NJ, deuxième édition.
- [Allen, 2003] ALLEN, R. M. (2003). Rapid magnitude determination for earthquake early warning. In *Workshop on Multidisciplinary Approach to Seismic Risk Problems*, Sant’Angelo dei Lombardi, Italy.
- [Allen et Kanamori, 2003] ALLEN, R. M. et KANAMORI, H. (2003). The potential for earthquake early warning in southern California. *Science*, 300(5620):786–789.
- [Anderson et Moore, 1971] ANDERSON, B. D. O. et MOORE, J. B. (1971). *Linear Optimal Control*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- [Argyris et Mlejnek, 1991] ARGYRIS, J. H. et MLEJNEK, H. P. (1991). *Dynamics of structures*, volume V de *Texts on computational mechanics*. North-Holland, Amsterdam, The Netherlands.
- [Asch G. et coll., 2010] ASCH G. ET COLL., éditeur (2010). *Les capteurs en instrumentation industrielle*. Dunod, Paris, France, septième édition.
- [ASN, 2001] ASN (2001). Règle fondamentale de sûreté n° 2001-01 relatives aux installations nucléaires de base. Rapport technique, Autorité de Sûreté Nucléaire (ASN), Paris, France.
- [Auger, 1991] AUGER, F. (1991). *Représentations temps-fréquence des signaux non-stationnaires : synthèse et contributions*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, Nantes, France.



- [Auger *et al.*, 1996] AUGER, F., FLANDRIN, P., GONÇALVÈS, P. et LEMOINE, O. (1996). Time-frequency toolbox. for use with MATLAB. Rapport technique, The MathWorks, Inc., Natick, MA.
- [Başar et Bernhard, 1991] BAŞAR, T. et BERNHARD, P. (1991).  *$\mathcal{H}_\infty$  Optimal Control and Related Minimax Design Problems : A Dynamic Game Approach*. Systems & Control : Foundations & Applications. Birkhäuser, Boston, MA, première édition.
- [Başar et Bernhard, 2008] BAŞAR, T. et BERNHARD, P. (2008).  *$\mathcal{H}_\infty$  Optimal Control and Related Minimax Design Problems : A Dynamic Game Approach*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, deuxième édition.
- [Balas *et al.*, 2012] BALAS, G., CHIANG, R., PACKARD, A. et SAFONOV, M. (2012). Robust control toolbox<sup>TM</sup> : Getting started guide. Rapport technique, The MathWorks, Inc., Natick, MA.
- [Basu et Nagarajaiah, 2008] BASU, B. et NAGARAJAIAH, S. (2008). A wavelet-based time-varying adaptive LQR algorithm for structural control. *Engng. Structures*, 30:2470–2477.
- [Benidir, 2004] BENIDIR, M. (2004). *Théorie et Traitement du Signal : Méthodes de base pour l'analyse et le traitement du signal*, volume Tome 2. Dunod, Paris, France.
- [Boashash, 2003] BOASHASH, B., éditeur (2003). *Time Frequency Signal Analysis and Processing : A Comprehensive Reference*. Elsevier Science, London, U.K.
- [Boore, 2003] BOORE, D. M. (2003). Simulation of ground motion using the stochastic method. *Pure and Applied Geophysics*, 160:635–676.
- [Boudreaux-Bartels, 1983] BOUDREAUX-BARTELS, G. F. (1983). *Time-frequency signal processing algorithms : Analysis and synthesis using Wigner distributions*. Thèse de doctorat, Rice Univ., Houston, TX.
- [Braverman *et al.*, 2007] BRAVERMAN, J. I., XU, J., ELLINGWOOD, B. R., COSTANTINO, C. J., MORANTE, R. J. et HOFMAYER, C. H. (2007). Evaluation of the seismic design criteria in ASCE/SEI standard 43-05 for application to nuclear power plants. Rapport technique BNL-NUREG-77569-2007, U.S. Nuclear Regulatory Commission, Washington, DC.
- [Brogan, 1991] BROGAN, W. L. (1991). *Modern Control Theory*. Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, NJ, troisième édition.
- [Bruni *et al.*, 1974] BRUNI, C., DIPILLO, G. et KOCH, G. (1974). Bilinear systems : An appealing class of “nearly linear” systems in theory and applications. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 19(4):334–348.
- [Budreaux-Bartels et Parks, 1986] BUDREAUX-BARTELS, G. F. et PARKS, T. W. (1986). Time-varying filtering and signal estimation using Wigner distribution synthesis techniques. *IEEE Trans. Acoustics, Speech, and Signal Processing*, 34(3):442–451.
- [Cahiers, 2011] CAHIERS (2011). *Les cahiers techniques du Bâtiment - Le monteur*, 310.
- [Cartwright, 1976] CARTWRIGHT, N. D. (1976). A non-negative Wigner-type distribution. *Physica*, 83(A):210–212.
- [CEA, 2005] CEA (2005). Projet Jules Horowitz : Dossier de présentation.

- [CEA, 2011] CEA (2011). Réacteur Jules Horowitz : Evaluation complémentaire de la sûreté au regard de l'accident survenu à la centrale nucléaire de Fukushima I. Rapport technique CEA/DEN/CAD/DIR/CSN – 140 RJULH PFW NTE 11000451 Ind. A, Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA).
- [CEN, 2004] CEN (2004). Eurocode 8 – Calcul des structures pour leur résistance aux séismes - Partie 1 : Règles générales, actions sismiques et règles pour les bâtiments. Rapport technique EN1998-1, Comité Européen de Normalisation (CEN), Bruxelles, Belgique.
- [Choi *et al.*, 2008] CHOI, K.-M., JUNG, H.-J., LEE, H.-J. et CHO, S.-W. (2008). Seismic protection of base-isolated building with nonlinear isolation system using smart passive control strategy. *Struct. Control Health Monit.*, 15(5):785–796.
- [Choi et Lee, 2001] CHOI, S.-B. et LEE, S.-K. (2001). A hysteresis model for the field-dependent damping force of a magnetorheological damper. *J. Sound and Vibration*, 245(2):375–383.
- [Chopra, 2007] CHOPRA, A. K. (2007). *Dynamics of Structures : Theory and Applications to Earthquake Engineering*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, troisième édition.
- [Clough et Penzien, 2003] CLOUGH, R. W. et PENZIEN, J. (2003). *Dynamics of Structures*. CSI, Berkeley, CA, troisième édition.
- [Cohen, 1989] COHEN, L. (1989). Time-frequency distributions—A review. *Proc. of the IEEE*, 77(7):941–981.
- [Cohen, 1995] COHEN, L. (1995). *Time-Frequency Analysis*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [Colaneri *et al.*, 1997] COLANERI, P., GEROMEL, J. et LOCATELLI, A. (1997). *Control Theory and Design : An  $RH_2$  and  $RH_\infty$  viewpoint*. Academic Press, San Diego, CA.
- [Constantinou et Symans, 1992] CONSTANTINOU, M. C. et SYMANS, M. D. (1992). Experimental and analytical investigation of seismic response of structures with supplemental fluid viscous dampers. Rapport technique NCEER-92-0032, National Center for Earthquake Engineering Research (NCEER), Buffalo, NY.
- [Corless et Leitmann, 1981] CORLESS, M. J. et LEITMANN, G. (1981). Continuous state feedback guaranteeing uniform ultimate boundedness for uncertain dynamic systems. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, AC-26(3):1139–1144.
- [Coron, 2007] CORON, J.-M. (2007). *Control and Nonlinearity*. AMS, Providence, Rhode Island.
- [Costa, 2010] COSTA, G. (2010). Contrôle actif et semi-actif des structures sous sollicitations sismiques. Mémoire de Master, CEA Saclay, Gif-sur-Yvette, France.
- [Datta, 2010] DATTA, B. N. (2010). *Numerical linear algebra and applications*. SIAM, Philadelphia, PA, deuxième édition.
- [de Coulon, 1996] DE COULON, F. (1996). *Théorie et Traitement des Signaux*. PPUR, Lausanne, Switzerland, troisième édition.
- [DeCarlo *et al.*, 1988] DECARLO, R. A., ZAK, S. H. et MATTHEWS, G. P. (1988). Variable structure control of nonlinear multivariable systems : A tutorial. *Proc. of IEEE*, 76(3):212–232.

- [Dion *et al.*, 2011] DION, C., BOUAANANI, N., TREMBLAY, R., LAMARCHE, C.-P. et LECLERC, M. (2011). Real-time dynamic substructuring testing of viscous seismic protective devices for bridge structures. *Engng. Struct.*, 33(12):3351–3363.
- [Duc, 2005] DUC, G. (2005). *Commande des systèmes linéaires par variables d'état*. polycopié. Supélec, Gif-sur-Yvette, France.
- [Duc et Font, 1999] DUC, G. et FONT, S. (1999). *Commande  $\mathcal{H}_\infty$  et  $\mu$ -analyse : des Outils pour la Robustesse*. Hermes Scie., Paris, France.
- [Dupont *et al.*, 1997] DUPONT, P., KASTURI, P. et STOKES, A. (1997). Semi-active control of friction dampers. *J. Sound Vibration*, 202(2):203–218.
- [Erkus et Johnson, 2006] ERKUS, B. et JOHNSON, E. A. (2006). Smart base-isolated benchmark building part III : A sample controller for bilinear isolation. *Struct. Control Health Monit.*, 13(2–3):605–625.
- [FEMA, 2009] FEMA (2009). Quantification of building seismic performance factors. ATC-63 Project P695, Federal Emergency Management Agency (FEMA), U.S.A.
- [Fend *et al.*, 1992] FEND, M. Q., SHINOZUKA, M. et FUJII, S. (1992). Experimental and analytical study of a hybrid isolation system with friction controllable sliding bearings. Rapport technique NCEER-92-0009, National Center for Earthquake Engineering Research (NCEER), Buffalo, NY.
- [Fenz et Constantinou, 2006] FENZ, D. M. et CONSTANTINOU, M. C. (2006). Behaviour of the double concave friction pendulum bearing. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*, 35(11):1403–1424.
- [Fredon et Bridier, 2003] FREDON, D. et BRIDIER, M. (2003). *Mathématiques pour les sciences de l'ingénieur*. Dunod, Paris, France.
- [Freeman et Kokotović, 1996] FREEMAN, R. A. et KOKOTOVIĆ, P. V. (1996). *Robust Nonlinear Control Design : State-Space and Lyapunov Techniques*. Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser, Boston, MA.
- [Galleani et Cohen, 2000a] GALLEANI, L. et COHEN, L. (2000a). Dynamics using the Wigner distribution. In *15th Int. Conf. Pattern Recognition*, pages 250–253, Barcelona, Spain.
- [Galleani et Cohen, 2000b] GALLEANI, L. et COHEN, L. (2000b). Wigner equations of motion for classical systems. In *Advanced Signal Processing Algorithms, Architectures, and Implementations*, pages 42–65, San Diego, CA.
- [Gantmacher, 1966] GANTMACHER, F. R. (1966). *Théorie des matrices : Questions spéciales et applications*, volume 2 de *Collection universitaire de mathématiques*. Dunod.
- [Gasparini *et al.*, 2007] GASPARINI, P., MANFREDI, G. et ZSCHAU, J. (2007). *Earthquake Early Warning Systems*. Springer-Verlag, Heidelberg, Germany.
- [Ghavamian, 1998] GHAVAMIAN, S. (1998). *Méthode simplifiée pour la simulation du comportement sismique des structures en béton armé*. Thèse de doctorat, Univ. de Sherbrooke, Canada. Mécanique, Génie Mécanique, Génie Civil.
- [Gibert, 1988] GIBERT, R.-J. (1988). *Vibrations des Structures*. Éditions Eyrolles, Paris, France.
- [Gille *et al.*, 1991] GILLE, J.-C., DECAULNE, P. et PÉLEGRIN, M. (1991). *Dynamique de la Commande Linéaire*. Dunod, Paris, France, huitième édition.

- [Glad et Ljung, 2000] GLAD, T. et LJUNG, L., éditeurs (2000). *Control Theory : Multivariable and Nonlinear Methods*. Taylor & Francis, London.
- [Grasso et al., 2005] GRASSO, V. F., IERVOLINO, I., OCCHIUZZI, A. et MANFREDI, G. (2005). Critical issues of seismic early warning systems for structural control. *In Proc. 9th Int. Conf. Structural Safety and Reliability*, Rome, Italy.
- [Gröchenig, 2001] GRÖCHENIG, K. (2001). *Foundations of Time-Frequency Analysis*. Birkhäuser, Boston.
- [Grünthal, 1998] GRÜNTAL, G., éditeur (1998). *European Macroseismic Scale EMS-98*, volume 15 de *Conseil de l'Europe, Cahiers du Centre Européen de Géodynamique et de Séismologie*. Luxembourg.
- [Gupta et Hall, 1990] GUPTA, A. K. et HALL, W. J. (1990). *Response Spectrum Method : In Seismic Analysis and Design of Structures*. Blackwell Scientific Pub., Boston, MA.
- [Gutman, 1979] GUTMAN, S. (1979). Uncertain dynamical systems—a lyapunov min-max approach. *IEEE Trans. Automat. Contr.*, 24(3):437–443.
- [Gutman et Leitmann, 1976] GUTMAN, S. et LEITMANN, G. (1976). Stabilizing feedback control for dynamical systems with bounded uncertainty. *In Proc. IEEE Conf. Decison Contr.*, pages 94–99.
- [Hedrick et Girard, 2005] HEDRICK, J. et GIRARD, A. (2005). *Nonlinear Dynamic Systems : Theory and Applications*. Lecture Notes. Univ. of California.
- [Hespanha, 2009] HESPANHA, J. P. (2009). *Linear Systems Theory*. Princeton Univ. Press, Princeton, NJ.
- [Hlawatsch, 1988] HLAWATSCH, F. (1988). *A study of bilinear time-frequency signal representations, with applications to time-frequency signal synthesis*. Thèse de doctorat, Technische Univ. Wien, Vienna, Austria.
- [Hlawatsch et Auger, 2008] HLAWATSCH, F. et AUGER, F., éditeurs (2008). *Time-Frequency Analysis. Concepts and Methods*. Digital Signal and Image Processing. Wiley–ISTE, London, U.K.
- [Hlawatsch et Budreaux-Bartels, 1992] HLAWATSCH, F. et BUDREAUX-BARTELS, G. F. (1992). Linear and quadratic time-frequency signal representations. *IEEE Sig. Proc. Magazine*, 9(2):21–67.
- [IAEA, 2003] IAEA (2003). Seismic design and qualification for nuclear power plants. Rapport technique NS-G-1.6, International Atomic Energy Agency (IAEA), Austria, Vienna.
- [Inman, 2001] INMAN, D. J. (2001). *Engineering vibration*. Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, deuxième édition.
- [Inman, 2006] INMAN, D. J. (2006). *Vibration with Control*. John Wiley & Sons, West Sussex, England.
- [Ionescu et Lupaş, 1974] IONESCU, V. et LUPAŞ, L. (1974). *Tehnici de calcul in teoria sistemelor. Sisteme optimale*, volume 2. Tehnică, Bucureşti, Romania.
- [Isidori, 1995] ISIDORI, A. (1995). *Nonlinear Control Systems*. Communications and Control Engng. Springer-Verlag, London, U.K., troisième édition.
- [Isidori, 1999] ISIDORI, A. (1999). *Nonlinear Control Systems II*. Communications and Control Engng. Springer-Verlag, London, U.K.

- [Jansen et Dyke, 2000] JANSEN, L. M. et DYKE, S. J. (2000). Semi-active control strategies for mr dampers : A comparative study. *ASCE J. Engng. Mechanics*, 128(8):795–803.
- [Janssen, 1988] JANSSEN, A. J. E. M. (1988). Positivity of time-frequency distribution functions. *Signal Processing*, 14(3):243–252.
- [Kamigaichi, 2004] KAMIGAICHI, O. (2004). JMA Earthquake early warning. *J. Japan Assoc. Earthquake Eng.*, 4(3 Special Issue):134–137.
- [Karnopp *et al.*, 1974] KARNOPP, D., CROSBY, M. M. et HARWOOD, R. A. (1974). Vibration control using semi-active force generators. *ASME Journal of Engineering for Industry*, 96:619–626.
- [Kausel, 2006] KAUSEL, E. (2006). *Fundamental Solutions in Elastodynamics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge, U.K.
- [Kelly, 1997] KELLY, J. M. (1997). *Earthquake-resistant design with rubber*. Springer-Verlag, New York, deuxième édition.
- [Kelly *et al.*, 1987] KELLY, J. M., LEITMANN, G. et SOLDATOS, A. G. (1987). Robust control of base-isolated structures under earthquake excitation. *J. Optimization Theory and Applications*, 53(2):159–180.
- [Khalil, 1996] KHALIL, H. K. (1996). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, deuxième édition.
- [Khalil, 2002] KHALIL, H. K. (2002). *Nonlinear Systems*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, troisième édition.
- [Khargonekar, 1991] KHARGONEKAR, P. P. (1991). State-space  $\mathcal{H}_\infty$  control theory and the LQG problem. In ANTOULAS, A. C., éditeur : *Mathematical system theory, the influence of R.E. Kalman*, pages 159–176. Springer-Verlag, Berlin, Germany.
- [Koo *et al.*, 2006] KOO, J.-H., GONCALVES, F. D. et AHMADIAN, M. (2006). A comprehensive analysis of the response time of MR dampers. *Smart Mater. Struct.*, 15(2):351–358.
- [Kreyszig, 2005] KREYSZIG, E. (2005). *Advanced Engineering Mathematics*. Wiley, Hoboken, NJ, neuvième édition.
- [Kurino *et al.*, 2004] KURINO, H., MATSUNAGA, Y., YAMADA, T. et TAGAMI, J. (2004). High performance passive hydraulic damper with semi-active characteristics. In *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, Canada.
- [Lancieri et Zollo, 2008] LANCIERI, M. et ZOLLO, A. (2008). A bayesian approach to the real-time estimation of magnitude from the early P and S wave displacement peaks. *J. Geophysical Research*, 113.
- [Langeoire, 2010] LANGEORE, A. (2010). Données sismiques pour les INB de surface du site de Cadarache. fiche technique DPSN/SSN/FT/020-2, Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA), France.
- [Larson, 1999] LARSON, R. G. (1999). *The Structure and Rheology of Complex Fluids*. Topics in Chemical Engineering. Oxford Univ. Press, Oxford, U.K.
- [Lay et Wallace, 1995] LAY, T. et WALLACE, T. C. (1995). *Modern Global Seismology*, volume 58 de *International Geophysics*. Academic Press, New York.

- [Lee et Kawashima, 2007] LEE, T.-Y. et KAWASHIMA, K. (2007). Semiactive control of nonlinear isolated bridges with time delay. *J. Struct. Engng.*, 133(2): 235–241.
- [Leitmann, 1979] LEITMANN, G. (1979). Guaranteed asymptotic stability for a class of uncertain linear dynamical systems. *J. Optimization Theory and Applications*, 27(1):99–106.
- [Leitmann, 1994] LEITMANN, G. (1994). Semiactive control for vibration attenuation. *J. Intelligent Material Systems and Structures*, 5:841–846.
- [Leitmann et Reithmeier, 1995] LEITMANN, G. et REITHMEIER, E. (1995). A control scheme based on er-materials for vibration attenuation of dynamical systems. *Applied Mathematics and Computation*, 70(2-3):247–259.
- [Lemoine, 1995] LEMOINE, O. (1995). *Détection de signaux non stationnaires par représentation temps-fréquence*. Thèse de doctorat, Univ. de Nice–Sophia Antipolis, Nice, France.
- [Levy et Wilkinson, 1976] LEVY, S. et WILKINSON, J. P. D. (1976). Generation of artificial time-histories, rich in all frequencies, from given response spectre. *Nuclear Engineering and Design*, 38(2):241–251.
- [Liu et Chen, 1993] LIU, J.-S. et CHEN, S.-L. (1993). On global stability of quadratic state feedback controlled linear systems. In *Proc. Aerospace Control Systems*, Westlake Village, California.
- [Loh et al., 2000] LOH, C.-H., LIN, P.-Y. et CHUNG, N.-H. (2000). Design of dampers for structures based on optimal control theory. *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 29(9):1307–1323.
- [Loughlin et Cohen, 2003] LOUGHLIN, P. et COHEN, L. (2003). Positive time-frequency distributions. In PAPANDREOU-SUPPAPPOLA, A., éditeur : *Applications in time-frequency signal processing*, chapitre 3. CRC Press, Boca Raton, FL.
- [Makris et al., 1996] MAKRIS, N., BURTON, S. A., HILL, D. et JORDAN, M. (1996). Analysis and design of ER damper for seismic protection of structures. *J. Engng. Mechanics*, 122(10):1003–1011.
- [Mallat, 2009] MALLAT, S. (2009). *A Wavelet Tour of Signal Processing : The Sparse Way*. Academic Press–Elsevier, Amsterdam, The Netherlands, troisième édition.
- [Manring, 2005] MANRING, N. (2005). *Hydraulic control systems*. John Wiley & Sons, Hoboken, NJ.
- [Mari et al., 2001] MARI, J.-L., GLANGEAUD, F. et COPPENS, F. (2001). *Traitements du Signal pour Géologues et Géophysiciens*, volume 2. Techniques de Base. Éditions Technip, Paris, France.
- [Mari et al., 2004] MARI, J.-L., GLANGEAUD, F. et COPPENS, F. (2004). *Traitements du Signal pour Géologues et Géophysiciens*, volume 3. Techniques Avancées. Éditions Technip, Paris, France.
- [Martin et Doncarli, 2004] MARTIN, N. et DONCARLI, C., éditeurs (2004). *Décision dans le Plan Temps-Fréquence*. Hermes Science Publications–Lavoisier, Paris, France.
- [Meirovitch, 1990] MEIROVITCH, L. (1990). *Dynamics and Control of Structures*. Ley-Interscience publication. Wiley, New York.

- [Merritt, 1967] MERRITT, H. E. (1967). *Hydraulic Control Systems*. Wiley, New York.
- [Miller et Michel, 2007] MILLER, R. K. et MICHEL, A. N. (2007). *Ordinary Differential Equations*. Dover Publications, New York.
- [Moler et van Loan, 2003] MOLER, C. et VAN LOAN, C. (2003). Nineteen dubious ways to compute the exponential of a matrix, twenty-five years later. *Society for Industrial and Applied Mathematics*, 45(1):3–49.
- [Montgabure et al., 2012] MONTGABURE, P., VASIC, S., POUPIN, S., LE CORRE, M. et MAHE, M. (2012). European series project - bandit program - seismic tests on a reinforced concrete frame with post-tensioned metal strips retrofitting. Note technique DEN/DANS/DM2S/SEMT/EMSI/NT/12-027/A, Commissariat à l'énergie atomique et aux énergies alternatives (CEA).
- [Naeim, 2001] NAEIM, F., éditeur (2001). *The Seismic Design Handbook*. Springer, Boston, MA, deuxième édition.
- [Naeim et Kelly, 1999] NAEIM, F. et KELLY, J. M. (1999). *Design of Seismic Isolated Structures : From Theory to Practice*. John Wiley & Sons, New York.
- [Nagarajaiah, 2006] NAGARAJAIAH, S. (2006). Structural control benchmark : Smart base isolated building subjected to near-fault earthquakes. *Struct. Control Health Monit.*, 13(2–3):571–572.
- [Naidu, 2003] NAIDU, D. S. (2003). *Optimal control systems*. Electrical engineering textbook series. CRC Press, Boca Raton, FL.
- [Narasimhan, 2004] NARASIMHAN, S. (2004). *Control of smart base isolated buildings with new semiactive devices and novel  $H_2/LQG$ ,  $\mathcal{H}_\infty$  and time-frequency controllers*. Thèse de doctorat, Rice Univ., Houston, TX.
- [Narasimhan et Nagarajaiah, 2006] NARASIMHAN, S. et NAGARAJAIAH, S. (2006). Smart base-isolated benchmark building part II : Phase I sample controllers for linear isolation systems. *Struct. Control Health Monit.*, 13(2–3):589–604.
- [Narasimhan et al., 2008] NARASIMHAN, S., NAGARAJAIAH, S. et JOHNSON, E. A. (2008). Smart base-isolated benchmark building part IV : Phase II sample controllers for nonlinear isolation systems. *Struct. Control Health Monit.*, 15(5):657–672.
- [Narasimhan et al., 2006] NARASIMHAN, S., NAGARAJAIAH, S., JOHNSON, E. A. et GAVIN, H. P. (2006). Smart base-isolated benchmark building. part I : problem definition. *Struct. Control Health Monit.*, 13(2–3):573–588.
- [Nishitani, 1998] NISHITANI, A. (1998). Application of active structural control in Japan. *Progress in Structural Engineering and Materials*, 1(3):301–307.
- [Nishitani, 2000] NISHITANI, A. (2000). Structural control implementations in Japan. In *12th World Conference on Earthquake Engineering*, Auckland, New Zealand.
- [Nishitani et Inoue, 2001] NISHITANI, A. et INOUE, Y. (2001). Overview of the application of active/semiactive control to building structures in Japan. *Earthquake Engng Struct. Dyn.*, 30:1565–1574.
- [Nishitani et al., 2000] NISHITANI, A., NITTA, Y. et ISHIBASHI, Y. (2000). Structural control based on semi-active variable friction dampers. In *12th World Conference on Earthquake Engineering*, Auckland, New Zealand.

- [Nitta *et al.*, 2006] NITTA, Y., NISHITANI, A. et SPENCER JR, B. F. (2006). Semiactive control strategy for smart base isolation utilizing absolute acceleration information. *Struct. Control Health Monit.*, 13(2–3):649–659.
- [Occhiuzzi *et al.*, 2004] OCCHIUZZI, A., GRASSO, V. F. et MANFREDI, G. (2004). Early warning systems from a structural control perspective. *In 3rd European Conf. Struct. Control*, Vienna, Austria.
- [Occhiuzzi *et al.*, 2006] OCCHIUZZI, A., IERVOLINO, I. et MANFREDI, G. (2006). Feedforward control algorithms for seismic early warning systems. *In 4th World Conf. Structural Control and Monitoring*, San Diego, CA.
- [Odaka *et al.*, 2003] ODAKA, T., ASHIYA, K., TSUKADA, S., SATO, S., OHTAKE, K. et NOZAKA, D. (2003). A new method of quickly estimating epicentral distance and magnitude from a single seismic record. *Bulletin Seismological Society of America*, 93(1):526–532.
- [Oden et Tend, 1985] ODEN, J. T. et TEND, J. A. C. (1985). Models and computational methods for dynamic friction phenomena. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 52(1–3):527–634.
- [Patel et Toda, 1980] PATEL, R. V. et TODA, M. (1980). Qualitative measures of robustness for multi variable systems. *Joint Automatic Contr. Conf.*, TP8-A.
- [Pawlac, 2007] PAWLAC, A. M. (2007). *Sensors and Actuators in Mechatronics : Design and Applications*. Taylor & Francis, New York.
- [Pecker, 2010a] PECKER, A. (2010a). Dynamique des structures et des ouvrages. *In présentation orale - Amphi3*, École des Ponts ParisTech (ENPC), Champs-sur-Marne, France.
- [Pecker, 2010b] PECKER, A. (2010b). *Dynamique des structures et des ouvrages*. photocopié. École des Ponts ParisTech (ENPC), Champs-sur-Marne, France.
- [Perry, 2006] PERRY, Y. L. (2006). *ME8281 – Advanced Control System Design*. Lecture Notes. Univ. of Minnesota.
- [Pham, 2010] PHAM, K. H. (2010). *Vulnérabilité et spectres de plancher des structures sismiquement isolées*. Thèse de doctorat, École Polytechnique, Palaiseau, France.
- [Pnevmatikos et Gantes, 2010] PNEVMATIKOS, N. G. et GANTES, C. J. (2010). Control strategy for mitigating the response of structures subjected to earthquake actions. *Engng. Structures*, 32(11):3616–3628.
- [Pnevmatikos *et al.*, 2004] PNEVMATIKOS, N. G., KALLIVOKAS, L. F. et GANTES, C. J. (2004). Feed-forward control of active variable stiffness systems for mitigating seismic hazard in structures. *Engng. Structures*, 26:471–483.
- [Politopoulos, 2005] POLITOPOULOS, I. (2005). Quelques aspects du comportement sismique des machines tournantes. Rapport technique SEMT/EMSI/RT/05-012/A, Commissariat à l'énergie atomique, France.
- [Politopoulos, 2008] POLITOPOULOS, I. (2008). A review of adverse effects of damping in seismic isolation. *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, 37(3):447–465.
- [Politopoulos, 2012] POLITOPOULOS, I. (2012). *Contribution à la compréhension de la réponse sismique de structures et d'équipements*. HdR (Habilitation à diriger des recherches en mécanique), Institut National des Sciences Appliquées de Lyon et l'Université Claude Bernard Lyon I.



- [Politopoulos et Pham, 2011] POLITOPOULOS, I. et PHAM, H. K. (2011). Floor spectra of mixed base isolated structures. *Bull. Earthquake Engng.*, 9(4):1115–1135.
- [Politopoulos et Sollogub, 2005] POLITOPOULOS, I. et SOLLOGUB, P. (2005). Vulnerability of elastomeric bearing isolated buildings and their equipment. *J. Earthquake Engng.*, 9(4):525–546.
- [Polyanin, 2002] POLYANIN, A. D. (2002). *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL.
- [Polyanin et Manzhirrov, 2007] POLYANIN, A. D. et MANZHIROV, A. V. (2007). *Handbook of Mathematics for Engineers and Scientists*. Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, FL.
- [Porubov *et al.*, 2003] PORUBOV, A. V., GURSKY, V. V. et MAUGIN, G. A. (2003). Selection of localized nonlinear seismic waves. In *Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.*, pages 85–93, Estonia.
- [Poussot-Vassal *et al.*, 2011] POUSSOT-VASSAL, C., SPELTA, C., SENAME, O., SAVARESI, S. et DUGARD, L. (2011). Survey on some automotive semi-active suspension control methods : A comparative study on a single-corner model. In *Proc. 18th IFAC World Congress*, pages 1802–1807.
- [Praly, 2003] PRALY, L. (2003). Une introduction à l'utilisation de fonctions de lyapunov pour la stabilisation et l'atténuation de perturbations. In LAMNABHILAGARRIGUE, F. et ROUCHON, P., éditeurs : *Commandes non linéaires*, Traité IC2, Systèmes automatisés, chapitre 2. Hermès science–Lavoisier, Paris, France.
- [Preumont, 1990] PREUMONT, A. (1990). *Vibrations Aléatoires et Analyse Spectrale*. PPUR, Lausanne, Switzerland.
- [Preumont, 2002] PREUMONT, A. (2002). *Vibration Control of Active Structures. An Introduction*, volume 96 de *Solid Mechanics and its Applications*. Kluwer Acad. Publ., New York, deuxième édition.
- [Pujol *et al.*, 2009] PUJOL, G., ACHO, L., POZO, F. et RODELLAR, J. (2009). A nonlinear damping control for the vibration mitigation of the benchmark highway bridge. *Struct. Control Health Monit.*, 16(5):586–598.
- [Pujol, 2004] PUJOL, J. (2004). Earthquake location tutorial : Graphical approach and approximate epicentral location techniques. *Seismological Research Lett.*, 75(1):63–74.
- [Pujol et Smalley, 1990] PUJOL, J. et SMALLEY, R. (1990). A preliminary earthquake location method based on a hyperbolic approximation to travel times. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 80(6):1629–1642.
- [Reinhorn *et al.*, 1987] REINHORN, A., SOONG, T. T. et WEN, C. Y. (1987). Base-isolated structures with active control. In *Proc. of ASME Pressure Vessel and Piping Conf.*, San Diego, CA.
- [Rezaeian et der Kiureghian, 2008] REZAEIAN, S. et DER KIUREGHIAN, A. (2008). A stochastic ground motion model with separable temporal and spectral nonstationarities. *Earthquake Eng. Struct. Dyn.*, 37(13):1467–1584.
- [Santiago *et al.*, 2011] SANTIAGO, E., WITRANT, E. et GONICHE, M. (2011). An optimal feedback approach to particle source identification in tokamaks. In *15th Int. Conf. System Theory, Control and Computing*, Sinaia, Romania.

- [Sato et Imabayashi, 1999] SATO, T. et IMABAYASHI, H. (1999). Real time conditional simulation of earthquake ground motion. *Earthquake Engineering and Engineering Seismology*, 1(1):27–38.
- [Satriano *et al.*, 2011] SATRIANO, C., ELIA, L. et MARTINO, C. (2011). PRESTo, the earthquake early warning system for southern Italy : Concepts, capabilities and future perspectives. *Soil Dynamics and Earthquake Engng.*, 31(2):137–153.
- [Satriano *et al.*, 2007] SATRIANO, C., LOMAX, A. et ZOLLO, A. (2007). Optimal, real-time earthquake location for early warning. In GASPARINI, P., MANFREDI, G. et ZSCHAU, J., éditeurs : *Earthquake Early Warning Systems*, pages 45–63. Springer, Berlin, Germany.
- [Satriano *et al.*, 2008] SATRIANO, C., LOMAX, A. et ZOLLO, A. (2008). Real-time evolutionary earthquake location for seismic early warning. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 98(3):1482–1494.
- [Savaresi *et al.*, 2010] SAVARESI, S. M., POUSSOT-VASSAL, C., SPELTA, C., SENNAME, O. et DUGARD, L., éditeurs (2010). *Semi-Active Suspension Control Design for Vehicles*. Butterworth-Heinemann.
- [Scruggs et Gavin, 2011] SCRUGGS, J. T. et GAVIN, H. P. (2011). Earthquake response control for civil structures. In LEVINE, W., éditeur : *The Control Handbook – Control System Applications*, The Electrical Engineering Handbook, chapitre 30, pages 30.1 – 30.26. CRC Press, deuxième édition.
- [Sepulchre *et al.*, 1997] SEPULCHRE, R., JANKOVIĆ, M. et KOKOTOVIĆ, P. V. (1997). *Constructive Nonlinear Control*. Springer-Verlag, London, U.K.
- [Shih *et al.*, 2004] SHIH, M.-H., SUNG, W.-P. et GO, C. G. (2004). Development of accumulated semi-active hydraulic dampers. In *13th World Conference on Earthquake Engineering*, Vancouver, Canada.
- [Soong, 1990] SOONG, T. T. (1990). *Active Structural Control : Theory and Practice*. Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, England.
- [Soong et Constantinou, 1994] SOONG, T. T. et CONSTANTINOU, M. C., éditeurs (1994). *Passive and Active Structural Vibration Control in Civil Engineering*, volume 345 de *Courses and Lectures*. Springer-Verlag, New York.
- [Stergiopoulos, 2001] STERGIOPOULOS, S. (2001). *Advanced Signal Processing Handbook : Theory and Implementation for Radar, Sonar, and Medical Imaging Real-Time Systems*. CRC Press, Boca Raton, FL.
- [Stewart et Sun, 1990] STEWART, G. W. et SUN, J.-G. (1990). *Matrix Perturbation Theory*. Academic Press, San Diego, CA.
- [Sueur *et al.*, 1997] SUEUR, C., VANHEEGHE, P. et BORNE, P., éditeurs (1997). *Automatique des systèmes continus : Éléments de cours et exercices résolus*. Technip, Paris, France.
- [Swami *et al.*, 2001] SWAMI, A., MENDEL, J. M. et NIKIAS, C. L. (2001). HOSA – Higher order spectral analysis toolbox. for use with MATLAB. Rapport technique, United Signals & Systems, Inc.
- [Tanguy, 1998] TANGUY, Y. (1998). *Analyse des signaux*. polycopié. Supélec, Gif-sur-Yvette, France.
- [Teodorescu, 2008] TEODORESCU, C. S. (2008). Contrôle du profil de courant des plasmas de fusion thermonucléaire. Mémoire de Master, CEA Cadarache, St. Paul lez Durance, France.

- [Teodorescu *et al.*, 2013a] TEODORESCU, C. S., DIOP, S., POLITOPOULOS, I. et BENIDIR, M. (2013a). A robust nonlinear semi-active control for base seismically-isolated structures. *In 21st Mediterranean Conf. on Control and Automation*, Chania, Greece.
- [Teodorescu *et al.*, 2013b] TEODORESCU, C. S., DIOP, S., POLITOPOULOS, I. et BENIDIR, M. (2013b). A semi-active controller tuning and application to base seismically-isolated structures. *In 12th Biannual European Control Conf.*, Zurich, Switzerland.
- [Trélat, 2005] TRÉLAT, E. (2005). *Contrôle optimal : Théorie et applications*. Vuibert, Paris, France.
- [Utkin, 1992] UTKIN, V. I. (1992). *Sliding Modes in Control Optimization*. Springer-Verlag, New York.
- [Vanmarcke, 1976] VANMARCKE, E. H. (1976). Structural response to earthquakes. *In LOMNITZ, C. et ROSENBLUETH, E., éditeurs : Seismic Risk and Engineering Decisions*, chapitre 8, pages 287–337. Elsevier, New York.
- [Veselov, 2002] VESELOV, A. P. (2002). Huygens' principle. *Encyclopedia of Non-linear Science*.
- [Viallet *et al.*, 2010] VIALLET, E., LABBÉ, P., GALLITRE, E., NADJARIAN, A., VANDEPUTTE, D., RAVET, S., HUMBERT, N. et al. (2010). Seismic re-evaluation of EDF Bugey 900 PWR nuclear power plant in the frame of the 3rd periodic safety review. *Nuclear Engng. Design*, 240(6):1306–1319.
- [Vidyasagar, 2002] VIDYASAGAR, M. (2002). *Nonlinear Systems Analysis*. Classics in Applied Mathematics. SIAM, Philadelphia, PA, deuxième édition.
- [Wang *et al.*, 2012] WANG, K. I., SALCIC, Z., WILSON, M. R. et BROOK, K. M. (2012). Miniaturized wireless sensor node for earthquake monitoring applications. *In 7th IEEE International Symposium on Industrial Embedded Systems*, Karlsruhe, Germany.
- [Wang et Xu, 2009] WANG, W. L. et XU, G. X. (2009). Fluid formulae for damping changeability conceptual design of railway semi-active hydraulic dampers. *Int. J. Non-Linear Mechanics*, 44(7):809–819.
- [Weinmann, 1991] WEINMANN, A. (1991). *Uncertain Models and Robust Control*. Springer-Verlag, Vienna, Austria.
- [Wolf et Constantinou, 2004] WOLF, E. D. et CONSTANTINOU, M. C. (2004). Experimental study of seismic isolation systems with emphasis on secondary system response and verification of accuracy of dynamic response history analysis methods. Rapport technique MCEER-04-0001, MCEER, Buffalo, NY.
- [Wu et Tend, 2002] WU, Y. M. et TEND, T. L. (2002). A virtual subnetwork approach to earthquake early warning. *Bulletin of the Seismological Society of America*, 92(5):2008–2018.
- [Xu *et al.*, 2006] XU, X., SINGH, T. et DARGUSH, G. F. (2006). Cubic control for phase I smart base-isolated benchmark building with emphasis on nonstructural performance. *Struct. Control Health Monit.*, 13(2–3):758–774.
- [Xu et Agrawal, 2008] XU, Z. et AGRAWAL, A. K. (2008). Semi-active control of seismically excited base-isolated building model with friction pendulum system. *Struct. Control Health Monit.*, 15(5):769–784.

- [Yandong et Xiaodong, 2007] YANDONG, L. et XIAODONG, Z. (2007). Wigner-Ville distribution and its application in seismic attenuation estimation. *Applied Geophysics*, 4(4):245–254.
- [Yang *et al.*, 1995] YANG, J. N., WU, J. C. et AGRAWAL, A. K. (1995). Sliding mode control for nonlinear and hysteretic structures. *J. Engng. Mechanics*, 121(12):1330–1339.
- [Yang *et al.*, 1994] YANG, J. N., WU, J. C. et HSU, S. Y. (1994). Parametric control of seismic-excited structures. *In 1st World Conf. Struct. Control*, Los Angeles, CA.
- [Zentner et Poirion, 2012] ZENTNER, E. et POIRION, F. (2012). Enrichment of seismic ground motion databases using Karhunen-Loève expansion. *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*
- [Zhou *et al.*, 1996] ZHOU, K., DOYLE, J. C. et GLOVER, K. (1996). *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ.
- [Zollo *et al.*, 2009] ZOLLO, A., IANNACCONE, G., CONVERTITO, V. et et AL. (2009). Earthquake early warning system in southern Italy. *Encyclopedia Complexity Syst. Sci.*, 5:2395–2421.



# Index

## Symbols

épicentre  
définition, [38](#)

## A

accélérogrammes  
analyse, [97](#)  
représentations, [99](#)

## C

clipped  
contrôle semi-actif, [64](#)  
commande de Leitmann  
forme générale, [122](#)  
coordonnées  
généralisées, [80](#)  
physiques, [78](#)

## D

dérivée de Lie, [122](#)  
densité spectrale d'énergie  
définition, [49](#)  
distribution de Wigner-Ville  
analyse de signaux sismiques, [96](#)  
définition, [49](#)  
propriétés  
marginales, [50](#)

## H

hypocentre  
définition, [38](#)

## P

pendule de frottement, [92](#)

## S

schéma de contrôle  
feedback et feedforward, [54](#)  
signal analytique  
définition, [50](#)  
spectre de plancher  
borne, [128](#), [129](#)  
définition, [50](#)  
propriétés, [51](#)

structures sismiquement isolées à la base  
modèles, [76](#)

synthèse  
contrôle actif, [122](#)  
contrôle semi-actif, [125](#)  
système nominal, [128](#)

## T

transformée de Fourier  
définition, [49](#)

## U

uniform ultimate boundedness, [126](#)



# A robust nonlinear semi-active control for base seismically-isolated structures

C.-S. Teodorescu<sup>1</sup>, S. Diop<sup>2</sup>, I. Politopoulos<sup>1</sup> and M. Benidir<sup>2</sup>

**Abstract**— This paper proposes a robust nonlinear semi-active control for base seismically-isolated structures. The control is based upon an extension of works of Leitmann et al. on the stabilization of nonlinear systems with uncertain models. For usual models of structure dynamics it is shown that applying a specific control law drives the state variables into a ball of specified radius in finite time. The radius of the ball may be arbitrarily chosen as long as it is not lower than a limiting value. In addition, estimates of this limiting ball radius is provided. The time to reach the ball is also provided. The semi-active control thus provides the control designer with interesting design parameters. The efficacy of proposed semi-active control is illustrated by its application to simple models of structures focusing in particular to the attenuation of excitation transmitted from floor to equipment mounted on them.

## I. INTRODUCTION

Base isolation is an alternative solution in earthquake protection of structures and equipment. Typically, a base isolated structure is put on very flexible bearings (e.g., rubber bearings). Roughly speaking this is the so-called passive control solution. Another solution, known as active control, consists of an ideal actuator which is controlled in order to stabilize the structure in presence of seismic disturbance. Such an actuator is assumed to be able to produce as well as dissipate energy in order to reduce structure motion. Typical active control actuators are the controlled hydraulic cylinders. On the other hand, the so-called semi-active control, is implemented through actuators that can only dissipate energy. Contrary to passive control devices the semi-active control actuators, typically, are viscous dampers whose parameters can be controlled by low power means. Passive control devices are fixed once for all while active control devices require too much energy. This is to say that semi-active control actuators are interesting alternative solutions for the protection of buildings and structures. In this work we consider actuators which consist of passive and

semi-active devices. When designing active control laws the structure dynamics often may be assumed linear, making the theoretical synthesis much easier while the real implementation is quite impossible. On the other hand semi-active control design is basically nonlinear while its implementation is being considered in near future installations. The semi-active control design is more involved compared to the active control design.

Most of previous works used a two-step procedure: a reference is first calculated using an *active* control law then this reference is approximated at the best utilizing available devices. The reader may refer to Politopoulos and Pham [14] where LQR techniques are used to calculate the above mentioned reference. Precisely, the initial motivation of this work was to design a semi-active control law for the two-degree-of-freedom structure of the latter paper. This is done by extending some work by Leitmann and co-authors [9]. In [9] a nonlinear *active* control is presented. In the present paper a nonlinear *semi-active* control strategy is proposed.

In addition to the requirement of satisfactory behavior of main structures (e.g., buildings), for industrial facilities an important issue is the proper functioning of equipment during and after an earthquake. To this end, pseudoacceleration floor response spectra which will be defined in Section III give relevant information. The main objective of this control design is to keep these floor spectra as low as possible. However the floor response spectrum is not an enough explicit criterion for control design techniques.

Most previous works use performance criterion in terms of maximum values of relative or absolute coordinates. In this paper a tentative use of the floor response spectrum is undergone. This is done by having recourse to modal coordinates. Penalties are introduced on modal coordinates that are responsible for generating higher values on the floor response spectrum.

The paper is organized as follows: The model of the structure is presented in the next section. In Section III we provide an account on the definition of floor response spectrum which shows the difficulty of using this quantity as a control design criterion. Section IV is devoted to the stabilization theory of nonlinear systems with uncertain models stemming from works of Leitmann and co-workers. Our extension of one of their results

<sup>1</sup>CEA, DEN, DANS, DM2S, SEMT, Laboratoire d'Etudes de Mécanique Sismique, F-91191 Gif-sur-Yvette, France, Catalin-Stefan Teodorescu <catalin-stefan.teodorescu@cea.fr>, Ioannis Politopoulos <ioannis.politopoulos@cea.fr>

<sup>2</sup>Laboratoire des Signaux & Systèmes, CNRS – Université Paris-Sud Orsay, SUPELEC, Plateau de Moulon, F-91192 Gif-sur-Yvette, France, Sette Diop <sette.diop@lss.supelec.fr>, Messaoud Benidir <messaoud.benidir@lss.supelec.fr>



is used in Section V to design the semi-active control which is proposed in this work. Finally simulations are shown illustrating the performance of this control law. Improvements over passive control will be seen as a noticeable result.

## II. PLANT MODEL

The model of base isolated structures that is considered in this work is the following mass-spring-damper-friction dynamic equations

$$M \ddot{z}_a + (C + C_c(c_A)) (\dot{z}_a - 1_{n \times 1} \dot{x}_g) + K (z_a - 1_{n \times 1} x_g) + E(\dot{z}_a, \dot{x}_g) = 0_{n \times 1}, \quad (1)$$

where the structure is modeled as an  $n$ -lumped-mass with horizontal displacement vector  $z_a(t)$  relative to an absolute (or inertial) reference, and where  $x_g(t)$  represents total ground level displacement due to the horizontal seismic motion. Notations  $0_{n \times 1}$ ,  $0_n$  respectively, stand for column vector of dimension  $n$  and matrices of size  $n \times n$  with 0 as coefficients;  $1_{n \times 1}$  stands for column vector with 1 as coefficients, and  $1_n$  is the identity matrix of size  $n$ .

The four terms in (1) denote inertia, the damping component of the structure dynamics which includes a semi-active viscous damper located at the base level and acting solely in horizontal direction, the third term stands for the structure stiffness dynamics, and the fourth term describes the dry friction passive device. The semi-active device is assumed to be an ideal damper whose time-varying viscous damping coefficient  $c_A$  is the control input. Physically, it is bounded  $c_A(t) \in [0, c_A^{\max}]$ , with  $c_A^{\max} > 0$ . More complex models of semi-active actuators may be considered as, for instance, in [14] where, in addition, hysteresis and spring components are present. The dry friction passive device depicted, contributing to structure dynamics through the term  $E(\dot{z}_a, \dot{x}_g)$  is a friction pendulum system (FPS) or bearing as often used in earthquake engineering literature. The simplest expression of the force generated by the latter device is ideally

$$E(\dot{z}_a, \dot{x}_g) = \begin{pmatrix} \mu F_N \text{sign}(\dot{z}_{a1} - \dot{x}_g) \\ 0_{(n-1) \times 1} \end{pmatrix},$$

where  $\mu$  is the dry friction coefficient,  $F_N$  is the normal force which is assumed to be constant in this work (i.e., time-variations of  $F_N$  due to the vertical component of earthquake excitation is neglected). To cope with more realistic models, and also to avoid mathematical difficulties the sign function is often replaced by a smooth one, such as the hyperbolic tangent function.

System (1) may be put in the form

$$M \begin{pmatrix} \ddot{z}_{a1} \\ \ddot{z}_{a2} \\ \vdots \\ \ddot{z}_{an} \end{pmatrix} + C \begin{pmatrix} \dot{z}_{a1} \\ \dot{z}_{a2} \\ \vdots \\ \dot{z}_{an} \end{pmatrix} + K \begin{pmatrix} z_{a1} \\ z_{a2} \\ \vdots \\ z_{an} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_A(\dot{z}_{a1} - \dot{x}_g) - k_b x_g + \mu F_N \text{sign}(\dot{z}_{a1} - \dot{x}_g) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

emphasizing the fact that both control and perturbation (seismic signal) appear only in the first equation of the system (which concerns the base level). Most often in earthquake engineering literature relative coordinates are used instead of absolute ones as done here. In addition, contrary to many previous works, the damping matrix  $C$  is not assumed to be non-modal in this paper. Recall that assuming  $C$  to be modal, means that: (i) the eigenvectors of the damped nominal (i.e., without uncertainty) system ( $M$ ,  $K$ ,  $C$ ) are usually taken to be the same as those of the undamped case ( $M$ ,  $K$ ,  $C = 0$ ), and (ii) to the bi-orthogonality properties involving  $M$  et  $K$ , one adds another orthogonality relation involving  $C$ . The reader is referred to [8, §3.5], [1, §9], for more details on this subject.

Specifically, when  $n = 2$  the structure is a 2-degree-of-freedom lumped-mass as depicted in Fig. 1 where the matrices  $M$ ,  $C$ ,  $C_c(c_A)$  and  $K$  are given by

$$M = \begin{pmatrix} m_b & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_b + k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{pmatrix}, \quad C_c(c_A) = \begin{pmatrix} c_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

where all coefficients are real positive numbers.

## III. PSEUDOACCELERATION FLOOR RESPONSE SPECTRUM

The objective of control design is to achieve sufficiently low values of the so-called *pseudoacceleration* (PSA) *floor response spectrum* for possible seismic disturbance  $\ddot{x}_g(t)$ . In control literature, this is a perturbation attenuation problem.

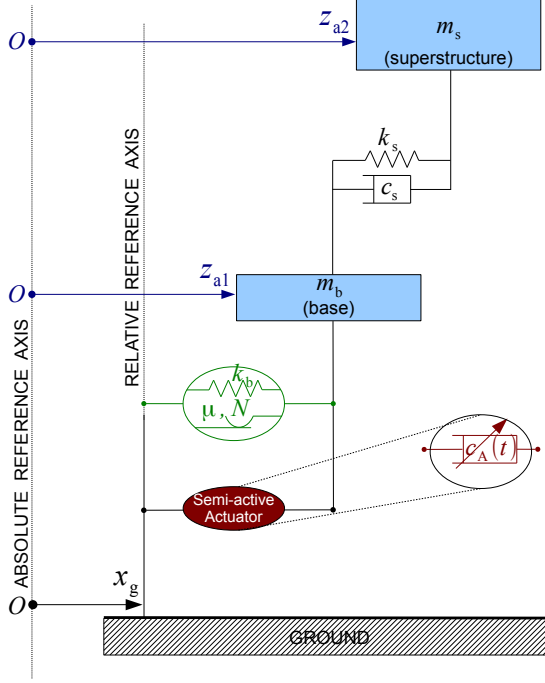
For the reader who is not familiar with earthquake engineering literature the following is reported: by definition (see § 25.1 of [3], Chapter 6 of [2], or § 7.3 of [12] for more details), the pseudoacceleration floor response spectrum is the function

$$(\omega, \zeta, v) \mapsto \text{PSA}(\omega, \zeta, v) = \omega^2 \max_{t \geq t_0} |y(t)| \quad (2a)$$

where

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = v(t), \quad y(t_0) = 0, \quad \dot{y}(t_0) = 0, \quad (2b)$$

and  $v(t)$  is typically the absolute acceleration of one of the  $n$  floors of the structure. In this paper we are only concerned with the base level, i.e., we take  $v(t) = \ddot{z}_{a1}(t)$ .



**Fig. 1:** A schematic diagram of a 2-degree-of-freedom structure in horizontal motion, with its absolute coordinates

When the signal  $v(t)$  is clear from context,  $\text{PSA}(\omega, \zeta, v)$  is simply denoted by  $\text{PSA}_\zeta(\omega)$ .

The explicit solution of (2b) is given by:

$$y(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_{t_0}^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) v(\tau) d\tau \quad (3)$$

with  $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ .

As is clear from its definition (2),  $\text{PSA}_\zeta(\omega)$  is *not* an explicit performance criterion that can be easily handled to obtain control laws. Multiple reasons can be mentioned, some of them are: (i) the non-additivity of response spectrum with respect to input signals; (ii) even for simple input signals, it is pretty difficult to construct a convex function based on  $\text{PSA}_\zeta(\omega)$  that may be used as minimization criterion. This is why in most papers dealing with this topic, closed-loop performance is expressed in terms of cost functions based on maximum displacement, velocity and acceleration of the structure in response to a number of given seismic signals [13].

In the present work a better insight to an explicit use of response spectrum as criterion is proposed.

#### IV. A ROBUST CONTROL NONLINEAR DESIGN THEOREM

The following result is largely inspired by the work of G. Leitmann and co-authors, see for instance [9], [4], [11],

[6], [7].

*Theorem 1:* Consider systems described by the following type of equations

$$\dot{x} = (A + \Delta A(t)) x + f(x, \nu) + (B(x) + \Delta B(t, x, \nu)) c_A(t) + D \nu(t), \quad (4)$$

with state variable  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , control input  $c_A(t) \in \mathbb{R}^m$ , and nonvanishing continuous-time perturbations  $\nu(t) \in \mathbb{R}^l$ . Matrices  $A$  and  $D$  are known constant ones,  $B$  is a *known* continuous function of  $x$ , structural uncertainties on plant model and actuator, respectively,  $\Delta A$  and  $\Delta B$  are *unknown* continuous functions of their arguments. Assume  $f$  and  $\rho$  to be known continuous functions of their arguments and that

- (i) matrix  $A$  is Hurwitz,  $P$  is the unique symmetric positive-definite solution of  $PA + A'P = -Q$ , given arbitrary symmetric positive definite  $Q$ ,
- (ii) functions  $\nu$ ,  $f$ ,  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  are bounded with respective bounds  $\nu^{\max}$ ,  $f^{\max}$ ,  $\Delta A^{\max}$ ,  $\Delta B^{\max}$ ,
- (iii)  $\Delta A^{\max} < \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)/2$ ,
- (iv)  $\rho(x) \in [0, \rho^{\max}]$ ,
- (v)  $\varepsilon > 0$ ,
- (vi) and let

$$b_0 = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \frac{f^{\max} + \Delta B^{\max} \rho^{\max} + \|D\| \nu^{\max}}{\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} - \Delta A^{\max}}. \quad (5)$$

If the control input is set as follows

$$c_A(x) = \max(0_{m \times 1}, p(x)) \quad (6)$$

$$p(x) = \begin{cases} -\frac{B(x)' P x}{\|B(x)' P x\|} \rho(x), & \|B(x)' P x\| \geq \varepsilon, \\ -\frac{B(x)' P x}{\varepsilon} \rho(x), & \|B(x)' P x\| < \varepsilon, \end{cases} \quad (7)$$

then all closed-loop trajectories  $x(t)$  are bounded, and, for any initial conditions  $x_0$  satisfying  $\|x_0\| \geq b$ , and for all  $b > b_0$  the trajectories  $x(t)$  are driven into balls of radius  $b$  within time

$$T = \frac{\ln \left( \frac{\sqrt{x_0' P x_0} - \sqrt{\lambda_{\min}(P)} b_0}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)} (b - b_0)} \right)}{\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} - \Delta A^{\max}}. \quad (8)$$

The proof of this theorem is not included here for lack of space. It was constructed using uniform boundedness and uniform ultimate boundedness tools as in Theorem 4.18 of [10] and page 1141 of [4]. Note that condition  $\|x_0\| \geq b$  implies the numerator of the fraction appearing inside the logarithm in (8) is strictly positive.

The following are comments on the differences between Thm 1 and its inspiring results in [9]. In [9], [4], [11] matching conditions provide the means to dominate the cumulative effect of perturbations and structured uncertainties on plant model and actuator, by using a

sufficiently strong active control law (7). In [9], [4], [11], [7] when  $\varepsilon = 0$  in (7) and the lower branch of control law is removed it can be shown that global asymptotic stability (GAS) of origin can be ensured. This means that the energy dissipation mechanism is ensured for all bounded perturbation signals, and for all  $t \geq 0$ .

The proposed SAC in Thm. 1 is not designed to ensure GAS of origin in any particular situation. Actually, hypotheses of Thm. 1 are not sufficient to prove GAS of origin. The control design function  $\rho(x)$  can be chosen arbitrarily small in Thm. 1 which is not the case in [9], [4], [11], [7] where a necessary lower bound,  $\rho(x) \geq \rho^{\min} > 0$  is calculated based on maximum amplitude value of perturbation. This allowed us to freely tune the function  $\rho(x)$  in order to attain performance criterion like floor response pseudoacceleration spectrum.

It is worth noting that the control (6) is a *continuous* function of variable  $x$ .

Summarizing, the theorem provides this very interesting design tool: application of the control allows to bring system trajectories into bounds  $b$  within time  $T$  as long as  $b > b_0$  where the limiting bound  $b_0$  is of course a pretty complex function of model uncertainties and control design parameters. In addition the theorem says that the higher the ratio  $\lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$  is the higher amount of uncertainty  $\Delta A$  can be tolerated. However, clearly, the desirable minimization of  $b_0$  and  $T$  with respect to control design parameters is not simple given the complexity of the dependance of  $b_0$  and  $T$  on model uncertainties and control parameters.

Applying Thm. 1 to the structure model (1) we show the following.

*Corollary 2:* The floor response spectrum evaluated at the base level is uniformly bounded over the entire frequency range:

$$\text{PSA}_\zeta(\omega) \leq \frac{1}{m_b} \frac{1}{\zeta \sqrt{1 - \zeta^2}} (\|v_1\| d(\|x_0\|) + \mu F_N) \quad (9)$$

where

$$v_1' := \begin{pmatrix} -(k_b + k_s) & k_s & -(c_s + c_A^{\max}) & c_s \end{pmatrix},$$

$$d(\|x_0\|) = \begin{cases} \sqrt{\frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)}} \|x_0\|, & \|x_0\| \geq \mu_0, \\ \mu_0, & \|x_0\| < \mu_0, \end{cases}$$

with

$$\mu_0 = \frac{\frac{\mu F_N}{m_b} + \sqrt{n} \ddot{x}_g^{\max}}{\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)}},$$

$$\ddot{x}_g^{\max} = \max_{t \geq 0} |\ddot{x}_g(t)|. \quad (10)$$

This corollary is not the best wanted result in practice: a better bound would be in terms of frequency  $\omega$  showing how the floor response peaks are decreased at

specific frequencies. Nevertheless it seems to be the first result linking floor response spectrum to control design parameters.

## V. SEMI-ACTIVE CONTROL

As already mentioned it is a standard practice in earthquake engineering (see [8]) to use real-valued modal coordinates as follows.

Let  $(\omega_i^2, \varphi_i)$ ,  $i = 1, \dots, n$  be the couples of eigenvalues and right eigenvectors associated with the symmetric matrices  $M$  and  $K$ , and  $M$  is positive-definite: for each  $i$ ,  $\omega_i$  and  $\varphi_i$  verify

$$K \varphi_i = \omega_i^2 M \varphi_i, \quad \varphi_i' M \varphi_j = \delta_{ij}, \quad \varphi_i' K \varphi_j = \omega_i^2 \delta_{ij}, \quad (11a,b,c)$$

where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol.  $\omega_i$  and coefficients of  $\varphi_i$  are all real-valued. Let  $(\omega_i^2, \varphi_i)$  be numbered such that  $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ . The reader may refer to [5, §11] for more details on the algebra of symmetric positive definite generalized eigenvalue problem. The eigenvectors  $\varphi_i$  are linearly independent [5, Thm. 11.9] and therefore form a basis; they are referred to as the *modes* of vibration [8]. Let

$$\phi = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n) \quad (12)$$

be the matrix of *modal shapes*, so that (11) can be rewritten in matrix form as:

$$K \phi = M \phi \Lambda, \quad \phi' M \phi = 1_n, \quad \phi' K \phi = \Lambda, \quad (13a,b,c)$$

with

$$\Lambda = \text{diag}(\omega_1^2, \omega_2^2, \dots, \omega_n^2).$$

Let  $q$  be the *modal coordinates* vector defined such that

$$z_a(t) = \phi q(t) = \varphi_1 q_1(t) + \varphi_2 q_2(t) + \dots + \varphi_n q_n(t). \quad (14)$$

Though not limited to two-degree-of-freedom structures, this semi-active control is applied to the case  $n = 2$  for simplicity in the sequel. In other words, instead of giving the method in its full generality, let us explain it on a simple example.

**A. Choice of  $Q$ :** Modal coordinates transformations are used in the following way to influence the floor response spectrum. Let  $W$  be a negative definite function,

$$W = -\gamma_1 q_1^2 - \gamma_2 q_2^2 - \gamma_3 \dot{q}_1^2 - \gamma_4 \dot{q}_2^2 \quad (15)$$

$$= -\begin{pmatrix} q' & \dot{q}' \end{pmatrix} \text{diag}(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4) \begin{pmatrix} q \\ \dot{q} \end{pmatrix},$$

with positive real parameters  $\gamma_i > 0$ . Parameters  $\gamma_1$  and  $\gamma_3$  are used to penalize the effect of first vibrational mode, in terms of generalized modal displacement and velocity, respectively. Similarly  $\gamma_2$  and  $\gamma_4$  are used to penalize the effect of second vibrational mode.

One can use transformation (14) in order to express  $W$  from (15) in terms of absolute coordinates vector  $x$  with

$$x = \begin{pmatrix} z_a \\ \dot{z}_a \end{pmatrix}, \quad (16)$$

By setting  $-x'Qx = W$  and using the last two biorthogonality properties from (13) in order to calculate explicitly the inverse of matrix  $\phi$  from (12), direct calculation leads to the following bloc diagonal matrix

$$Q = \text{diag} \left( M' (\gamma_1 \varphi_1 \varphi_1' + \gamma_2 \varphi_2 \varphi_2') M, \right. \\ \left. M' (\gamma_3 \varphi_1 \varphi_1' + \gamma_4 \varphi_2 \varphi_2') M \right), \quad (17)$$

and the structure model (1) can be rewritten as

$$\dot{x} = Ax + f(x, \nu) + (B(x) + \Delta B(\nu)) c_A + D \nu. \quad (18)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, \Delta B(\nu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{x}_g/m_b \\ 0 \end{pmatrix}, \\ f(x, \nu) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -M^{-1}E(x, \nu) \end{pmatrix}, B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -\dot{z}_{a1}/m_b \\ 0 \end{pmatrix}, \\ D = \begin{pmatrix} 0_2 \\ M^{-1}K \ 1_{2 \times 1} \quad M^{-1}C \ 1_{2 \times 1} \end{pmatrix}, \text{ and } \nu = \begin{pmatrix} x_g \\ \dot{x}_g \end{pmatrix}.$$

The initial condition of (18) is  $x(0) = 0_{2n \times 1}$ .

**B. Choice of  $\rho(\cdot)$ :** In order to be able to protect the actuator from damage, the maximum allowed damping force  $F^{\max}$  can be taken into account in the design of control law parameters by setting

$$\rho(\dot{z}_{r1}) = \max \{ \rho^{\max}, F^{\max}/|\dot{z}_{r1}| \},$$

where the relative velocity at the base level  $\dot{z}_{r1} = \dot{z}_{a1} - \dot{x}_g$ .

System (18) is of the form (4) allowing to apply Thm 1.

## VI. SIMULATION RESULTS

In this section we illustrate the performance of the proposed semi-active control through the 2-degree-of-freedom structure already detailed throughout the previous section. The parameters (in consistent units) which are used in the simulations are as follows:  $m_b = 0.25$ ;  $m_s = 1$ ;  $k_b = 12.3370$ ;  $c_s = 1.8850$ ;  $k_s = 355.3058$ ;  $c_A^{\max} = 1.5708$ ; the regularized function to be used instead of  $\text{sign}(y)$  is  $\sigma(y) = \tanh(11 \times y)$ . The floor response spectra are calculated for  $\zeta = 2\%$  damping.

Multiple control scenarios are shown for comparison:

- NC (no control): this is the uncontrolled structure dynamic response to the seismic solicitation. Specifically, the structure is seismically isolated by a dry friction device with a low value for friction coefficient  $\mu$ . In the simulations to be shown we used  $\mu = 7.48 \times 10^{-3}$ .
- PC (passive control): an additional damping is put at the base level consisting of a high damping rubber bearing (HDRB), so that the total equivalent damping coefficient is  $\xi_b + \Delta\xi_b = 25\%$ . In simple words, in Fig. 1 the friction device is removed and replaced by a damper with damping coefficient  $c_{\text{tot}} = 2.2777$ .

- SAC corresponds to implementing control law (6) on plant model (1) or (18), with adjustment parameters  $\varepsilon = 5 \times 10^{-3}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_3 = 5 \times 10^{-4}$ ,  $\gamma_2 = 5 \times 10^2$ ,  $\gamma_4 = 10^{-5}$ ;  $\rho(\cdot) \equiv c_A^{\max}$ .

**A. Choice of seismic records:** Instead of real records of seismic signal it was found more illustrative to use artificial ones for  $\ddot{x}_g(t)$ . These signals suit the ground response pseudoacceleration spectrum specification of Cadarache rock site, in southern France. They were scaled in amplitude to reach a maximum absolute value of  $0.6g$ , with  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ , so that they correspond to strong motion earthquake accelerograms. Actually, it was our intention to use signals that ensure control to be within the full range of 0 to  $c_A^{\max}$ . Otherwise, if signals are too weak compared to a reference, namely the signal used to calibrate control parameters, the effect of adding a SAC force is negligible with respect to the natural behavior of structure. On the contrary, if seismic signals are too strong the SAC may saturate and it will act as PC with high damping, which again is not wanted. In other words, prior to implementing in practice this SAC, it is necessary to have some *a priori* knowledge on the maximum amplitude of seismic signal to hit the structure. In earthquake engineering, this information is often used in seismic characterization and is called peak ground acceleration, with the definition (10). On the other hand, it is also required by Thm. 1 as in its second assumption.

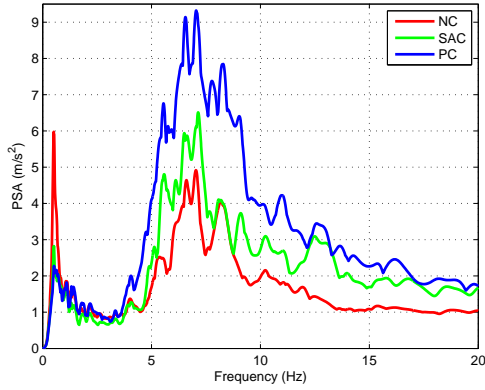
Moreover, the selection of seismic signals has been made such that they are wide-band sufficiently rich in

- low spectral content around first eigenfrequency so that we can notice a pretty large first peak on floor response spectrum curve when using NC,
- higher spectral content around second eigenfrequency, otherwise, phenomena related to amplification of second mode of vibration, e.g., when using PC, might not be visible in terms of floor response spectrum. Often, this is the case for earthquake signals recorded on stiff soil and rock sites.

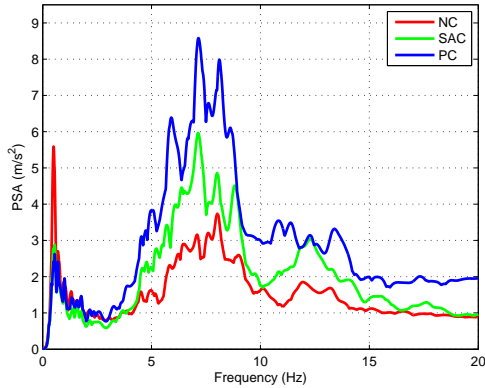
**B. Calibration of control law parameters:** The control parameters are calibrated once for all three simulations, using a trial and error approach. They are calculated with the seismic signal used to draw results of Fig. 2. The other two figures then serve for validation and to support further discussions on control capabilities.

**C. Interpretation:** Since the choice of control parameters has been made with respect to only one seismic signal, one may wonder whether or not the result concerning adjustment control parameters is globally available. By looking at Figs. 3–4, one can notice a visible advantage and improvement when using SAC over PC in terms of floor response spectrum evaluation especially around second eigenfrequency. Actually, the PC curve is used in this work as a qualitative indicator of a worst case behavior for validating the use of more complex SAC techniques over the simpler passive control. In other

words, if there is no visible improvement of SAC over PC, the SAC should be disregarded since there is no practical interest in using it. Fortunately, our simulations show that SAC is doing better than PC, at the expense of increased implementation cost. Extended simulations with randomly chosen natural, historical, seismic events showed that, as a worst case behavior of this SAC device with fixed adjustment parameters, the performance in terms of floor response spectra will be at least as good as PC.



**Fig. 2:** Floor response spectrum at the base in response to seismic signal record no. 1

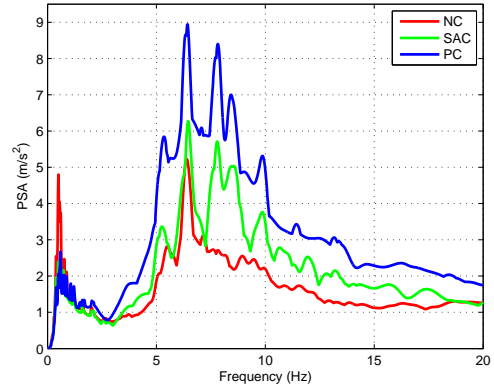


**Fig. 3:** Floor response spectrum at the base in response to seismic signal record no. 2

## VII. CONCLUSIONS

In this paper Leitmann and co-authors's results on the stabilization of uncertain nonlinear systems and on earthquake structure protection both have been revisited. Bounds are calculated guaranteeing some interesting control design parameters. This result is more user friendly. The major achievement lies in the adaptation of control law and system dynamics towards solving SAC problems. A second contribution of this paper consisted in presenting a method for choosing SAC parameters, based on vibrational modes analysis. One reason for

proceeding in this direction is that performance in closed-loop of structure response to unknown seismic signals is evaluated qualitatively in terms of floor response pseudoacceleration spectrum. We showed that working with information related to balls radius size in state space coordinates might provide efficient and possible means to reduce the floor response spectral bound.



**Fig. 4:** Floor response spectrum at the base in response to seismic signal record no. 3

## REFERENCES

- [1] J.H. Argyris, H.P. Mlejnek, *Dynamics of structures*, Texts on computational mechanics, North-Holland, Amsterdam, The Netherlands, 1991.
- [2] A.K. Chopra, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
- [3] R.W. Clough, J. Penzien, *Dynamics of Structures*, Third edition, CSI, Berkeley, CA, 2003.
- [4] M.J. Corless, G. Leitmann, Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamic Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-26**(1981), 1139–1144.
- [5] B.N. Datta, *Numerical linear algebra and applications*, second edition, SIAM, Philadelphia, PA, 2010.
- [6] S. Gutman, Uncertain dynamical systems—A Lyapunov min-max approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **24**(1979), 437–443.
- [7] S. Gutman, G. Leitmann, Stabilizing feedback control for dynamical systems with bounded uncertainty, in *Proc. IEEE Conf. Decison Contr.*, 1976, pp. 94–99.
- [8] D.J. Inman, *Vibration with Control*, John Wiley & Sons, West Sussex, England, 2006.
- [9] J.M. Kelly, G. Leitmann, A.G. Soldatos, Robust control of base-isolated structures under earthquake excitation, *J. Optimization Theory and Applications*, **53**(1987), 159–180.
- [10] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Third edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [11] G. Leitmann, Guaranteed Asymptotic Stability for a Class of Uncertain Linear Dynamical Systems, *J. Optimization Theory and Applications*, **27**(1979), 99–106.
- [12] F. Naeim, J.M. Kelly, *Design of Seismic Isolated Structures: From Theory to Practice*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [13] S. Narasimhan, S. Nagarajaiah, E.A. Johnson, Smart base-isolated benchmark building part IV: Phase II sample controllers for nonlinear isolation systems, *Struct. Control Health Monit.*, **15**(2008), 657–672.
- [14] I. Politopoulos, H.K. Pham, Floor spectra of mixed base isolated structures, *Bull. Earthquake Engng.*, **9**(2011), 1115–1135.



# A semi-active controller tuning and application to base seismically-isolated structures

C.-S. Teodorescu<sup>1</sup>, S. Diop<sup>2</sup>, I. Politopoulos<sup>1</sup> and M. Benidir<sup>2</sup>

**Abstract**— This paper proposes a modified version of Leitmann and co-authors' classical result on the stabilization of uncertain nonlinear systems. In particular, for usual models of structure dynamics in earthquake engineering it is shown that applying a specific control law drives the state variables into a ball around the origin (arbitrarily chosen) in finite time as long as the radius of the ball is not lower than a limiting value. In addition estimates of this limiting ball radius and the time limit for arbitrary ball radius are provided. The semi-active control thus provides the control designer with interesting design parameters. It is also an attempt to explicitly use pseudoacceleration floor response spectrum as a performance criterion. Though not limited to two-degree-of-freedom structures, this semi-active control is applied to these plant models for simplicity and illustrated through simulations.

## I. INTRODUCTION

Earthquake protection of structures (e.g., buildings in civil engineering, power generation facilities like nuclear installations or special equipments) has been studied for decades and is still an active area of research in earthquake engineering. A practical solution for base isolated structures uses controlled devices situated at the base level and consisting of actuators that should not require large amount of energy, for instance, for security reasons. Such requirements lead to semi-active control design. Most of previous works used a two-step procedure: a reference is first calculated using an *active* control law then this reference is approximated at the best utilizing available devices. The reader may refer to [15] where LQR techniques are used to calculate the above mentioned reference.

In the present paper, the two degree of freedom structure considered by Politopoulos and Pham in [15] is revisited using an extension of a theorem by Leitmann and co-authors [8]. Contrary to [8] where a nonlinear *active* control is designed, in the present paper a nonlinear *semi-active* control (SAC) strategy is proposed. In

addition, robustness aspects are addressed by allowing uncertainties in main parts of the model of the structure.

More specifically, the main result in [8] is first revisited by focusing in semi-active instead of active control. Some bounds on trajectories as well as time estimates of time to reach such bounds are provided in the present paper. Under specified conditions it is possible to state that all system trajectories are driven to a neighborhood of the origin within finite time, and estimates of these limiting quantities are calculated. Moreover, the main objective of control is to keep the so-called *floor response spectrum* as low as possible. Floor spectrum is known from earthquake protection literature. Most previous works use performance criterion in terms of relative or absolute coordinates. In this paper, a tentative use of the floor spectrum is proposed. This is done by having recourse to modal coordinates [16, §2.3], [2, §12], [17, §3.4]. In most literature dealing with vibration, modal description is mainly used for analysis, while we use it for control synthesis purpose. For two-degree-of-freedom structure model, penalties are introduced on modal coordinates that are responsible for generating higher values on the floor spectrum.

Recall that, in seismic protection literature, control systems are commonly classified in one of the following three types [16], [17], [7]: passive, semi-active and active. From a physical point of view, semi-active devices are basically passive devices, but contrary to the latter, they have time-dependent characteristics that can be adjusted in real time and therefore provide more flexibility in designing control vibration isolation solutions. Compared to active actuators, they require small amounts of external energy source to be driven, meet safety requirements and are cheaper for maintenance. In addition, reduced-size installations are necessary to drive and operate them.

The paper is organized as follows: The model of the structure is briefly recalled in the next section, followed by some details on the floor spectrum concept. Then in Section IV a theoretical result is provided that addresses the stabilization of uncertain nonlinear systems. It is this result which is applied in Section V to obtain the proposed semi-active control. Finally simulations are shown illustrating the performance of the semi-active controller. They present improvements over passive control, for some seismic signals, notably around the second eigenfrequency.

<sup>1</sup>CEA, DEN, DANS, DM2S, SEMT, Laboratoire d'Etudes de Mécanique Sismique, F-91191 Gif-sur-Yvette, France, Catalin-Stefan Teodorescu <catalin-stefan.teodorescu@cea.fr>, Ioannis Politopoulos <ioannis.politopoulos@cea.fr>

<sup>2</sup>Laboratoire des Signaux & Systèmes, CNRS – Université Paris-Sud Orsay, SUPELEC, Plateau de Moulon, F-91192 Gif-sur-Yvette, France, Sette Diop <sette.diop@lss.supelec.fr>, Messaoud Benidir <messaoud.benidirBenidir@lss.supelec.fr>

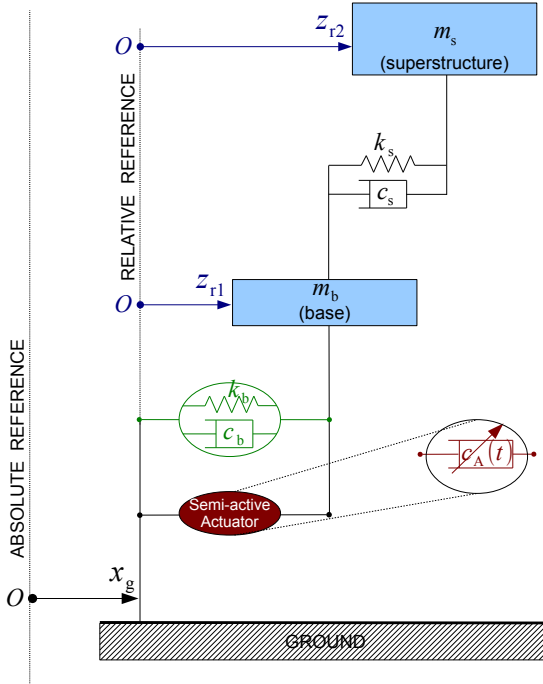
## II. PLANT MODEL

The class of base isolated structures that are considered in this work is described by the following type of equations

$$M \ddot{z}_r + (C + C_c(c_A)) \dot{z}_r + K z_r = -M \mathbf{1}_{n \times 1} \ddot{x}_g(t) \quad (1)$$

where the structure is modeled as an  $n$ -lumped-mass with horizontal displacements relative to the ground denoted by  $z_r$ , and where  $\ddot{x}_g(t)$  represents total ground level acceleration due to the horizontal seismic motion.

The three terms in (1) denote inertia, the damping component of the structure dynamics which includes a semi-active viscous damper located at the base level and acting solely in horizontal direction, and the third term stands for the structure stiffness dynamics. The semi-active device is assumed to be an ideal damper whose time-varying viscous damping coefficient  $c_A$  is the control input. According to its physical meaning, it should keep bounded  $c_A(t) \in [0, c_A^{\max}]$ , with  $c_A^{\max} > 0$ . More complex models of semi-active actuators may be considered as, for instance, in [15] where, in addition, hysteresis and spring components are present.



**Fig. 1:** A schematic diagram of a 2-degree-of-freedom structure in horizontal motion, with its relative coordinates

For a 2-degree-of-freedom lumped-mass depicted in Fig. 1, the matrices  $M$ ,  $C$ ,  $C_c(c_A)$  and  $K$  are given by

$$M = \begin{pmatrix} m_b & 0 \\ 0 & m_s \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_b + k_s & -k_s \\ -k_s & k_s \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} c_b + c_s & -c_s \\ -c_s & c_s \end{pmatrix}, \quad C_c(c_A) = \begin{pmatrix} c_A & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

with all coefficients, real positive numbers, that can easily be identified in Fig. 1.

In practice, the variation of  $c_A(t)$  corresponds to the opening-closing of an orifice within the architecture of the viscous damper device. For more details, one may see [18].

Notation  $\mathbf{1}_{n \times 1}$  stands for column vector with 1 as coefficients, and  $\mathbf{1}_n$  will be used hereafter to designate the identity matrix of size  $n$ .

## III. FLOOR RESPONSE SPECTRUM

The objective of control design is to achieve sufficiently low values of the so-called *floor response spectrum*, for all seismic disturbance  $\ddot{x}_g(t)$ . In control literature, this is a perturbation attenuation problem with a specific performance criterion.

For the reader who is not familiar with earthquake engineering literature the following is reported: floor response spectrum, by definition (see § 25.1 of [2], Chapter 6 of [1], or § 7.3 of [11] for more details), is the function

$$(\omega, \zeta, v) \mapsto \text{PSA}(\omega, \zeta, v) = \omega^2 \max_{t \geq t_0} |y(t)| \quad (2)$$

where

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega\dot{y} + \omega^2 y = v(t), \quad y(t_0) = 0, \quad \dot{y}(t_0) = 0, \quad (3)$$

and  $v(t)$  is typically the absolute acceleration of one of the  $n$  floors of structure model. In this paper we are only concerned with base level, therefore use the quantity  $\ddot{z}_{r1}(t) + \ddot{x}_g(t)$  instead of  $v(t)$ . When the signal  $v(t)$  is clear from context,  $\text{PSA}(\omega, \zeta, v)$  is simply denoted by  $\text{PSA}_\zeta(\omega)$ . This notation stands for pseudo-acceleration (PSA) and emphasizes the fact that the unit of measurement is  $\text{m/s}^2$ .

The explicit solution of (3) is given by:

$$y(t) = \frac{1}{\omega_d} \int_{t_0}^t e^{-\zeta\omega(t-\tau)} \sin(\omega_d(t-\tau)) v(\tau) d\tau \quad (4)$$

with  $\omega_d = \omega\sqrt{1-\zeta^2}$ .

As is clear from its definition (2), floor spectrum is *not* an explicit performance criterion that can be easily handled to obtain control laws. Multiple reasons can be cited, some of them are: (i) the nonlinear nature of the result, with respect to additivity of multiple input signals; (ii) even for simple input signals, like monochromatic and Heaviside step functions, the resulting  $\text{PSA}_\zeta(\omega)$  is a non-convex function.

This is why in most papers dealing with this topic, closed-loop performance is expressed in terms of cost functions based on maximum displacement, velocity and acceleration of the structure in response to a number of given seismic signals [12]. In present work a better insight to explicit use of floor spectrum criterion is proposed.

To face the problem of  $\ddot{x}_g(t)$  being unknown, and since it is needed for calculating  $v(t)$  and further on (4), one can think of (at least) two strategies:

- even if earthquakes are known to be unpredictable, try to use explicit mathematical models of  $\ddot{x}_g(t)$ , the so-called artificial signals [19], based on some *a priori* knowledge, e.g., semi-empirical laws related to some local geographical sites,
- use available past records of signals  $\ddot{x}_g(t)$  and compute numerically the solutions of equation (3) and use it in (2) to get approximated values.

Both situations emphasize the difficulty to construct a general controller based on floor spectrum. Therefore, the following control design approach is proposed: use *modal coordinates* in lieu of relative or absolute ones, and introduce penalties on various modes that are known to give high values on floor spectrum. This is detailed in Section V.

#### IV. A ROBUST CONTROL DESIGN THEOREM

The following result is largely inspired by the work of G. Leitmann and co-authors, see for instance [8], [3], [10], [5], [6].

*Theorem 1:* Consider systems described by the following type of equations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= (A + \Delta A(t)) x + f(x, \nu) + \\ &\quad (B(x) + \Delta B(t, x, \nu)) c_A(t) + D \nu(t), \\ x(0) &= x_0 \end{aligned} \quad (5)$$

with state variable  $x(t) \in \mathbb{R}^n$ , control input  $c_A(t) \in \mathbb{R}^m$ , and nonvanishing continuous-time perturbations  $\nu(t) \in \mathbb{R}^l$ . Matrices  $A$  and  $D$  are known constant ones,  $B$  is a *known* continuous function of  $x$ , structural uncertainties on plant model and actuator, respectively,  $\Delta A$  and  $\Delta B$  are *unknown* continuous functions of their arguments. Assume  $f$  and  $\rho$  to be known continuous functions of their arguments and that

- matrix  $A$  is Hurwitz,  $P$  is the unique symmetric positive-definite solution of  $PA + A'P = -Q$ , given arbitrary symmetric positive definite  $Q$ ,
- functions  $\nu$ ,  $f$ ,  $\Delta A$ ,  $\Delta B$  are bounded with respective bounds  $\nu^{\max}$ ,  $f^{\max}$ ,  $\Delta A^{\max}$ ,  $\Delta B^{\max}$ ,
- $\Delta A^{\max} < \lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)/2$ ,
- $\rho(x) \in [0, \rho^{\max}]$ ,
- $\varepsilon > 0$ ,
- and let

$$b_0 = \frac{\lambda_{\max}(P)}{\lambda_{\min}(P)} \frac{f^{\max} + \Delta B^{\max} \rho^{\max} + \|D\| \nu^{\max}}{\frac{1}{2} \lambda_{\min}(Q) - \Delta A^{\max}}. \quad (6)$$

If the control input is set as follows

$$c_A(x) = \max(0_{m \times 1}, p(x)) \quad (7)$$

$$p(x) = \begin{cases} -\frac{B(x)' P x}{\|B(x)' P x\|} \rho(x), & \|B(x)' P x\| \geq \varepsilon, \\ -\frac{B(x)' P x}{\varepsilon} \rho(x), & \|B(x)' P x\| < \varepsilon, \end{cases} \quad (8)$$

then all closed-loop trajectories  $x(t)$  are bounded, and, for any initial conditions  $x_0$  satisfying  $\|x_0\| \geq b$ , and for all  $b > b_0$  the trajectories  $x(t)$  are driven into balls of radius  $b$  within time

$$T = \frac{\ln \left( \frac{\sqrt{x_0' P x_0} - \sqrt{\lambda_{\min}(P)} b_0}{\sqrt{\lambda_{\min}(P)} (b - b_0)} \right)}{\frac{1}{2} \frac{\lambda_{\min}(Q)}{\lambda_{\max}(P)} - \Delta A^{\max}}. \quad (9)$$

The proof of this theorem was constructed using uniform boundedness and uniform ultimate boundedness tools as in Theorem 4.18 of [9] and page 1141 of [3]. It is not included here for lack of space. Note that condition  $\|x_0\| \geq b$  implies the numerator of the fraction appearing inside the logarithm in (9) is strictly positive. Next, we will briefly provide some details which will be used in the following section, to justify the different choices of controller parameters. To calculate (9) we have used the Lyapunov-like function

$$V(x) = x' P x$$

and its derivative along system (5) trajectories:

$$\begin{aligned} \dot{V}(x) &= \dot{x}' P x + x' P \dot{x} \\ &= -x' Q x + 2x' P B(x) c_A(x) + \\ &\quad 2x' P [\Delta A(t) x + f(x, \nu) + \Delta B(t, x, \nu) c_A(x) + D \nu] \end{aligned} \quad (10)$$

The following are comments on the differences between Thm 1 and its inspiring results in [8]. In works [8], [3], [10] matching conditions provide the means to dominate the cumulative effect of perturbations and structured uncertainties on plant model and actuator, by using a sufficiently strong active control law (8). In [8], [3], [10] when  $\varepsilon = 0$  in (8) and the lower branch of control law is removed it can be shown that global asymptotic stability (GAS) of origin can be ensured. This means that the energy dissipation mechanism is ensured for all bounded perturbation signals, and for all  $t \geq 0$ .

The proposed SAC in Thm. 1 is not designed to ensure GAS of origin in any particular situation. Actually, hypotheses of Thm. 1 are not sufficient to prove GAS of origin. The controller design function  $\rho(x)$  can be chosen arbitrarily small in Thm. 1 which is not the case in [8], [3], [10] where a necessary lower bound,  $\rho(x) \geq \rho^{\min} > 0$  is calculated based on an *a priori* knowledge of the maximum amplitude value of perturbation. This allowed us to freely tune the function  $\rho(x)$  in order to attain performance criterion like floor response pseudoacceleration spectrum.

It is worth noting that the controller (7) is a *continuous* function of variable  $x$ .

Summarizing, the theorem provides this very interesting design tool: application of the controller allows to bring system trajectories into bounds  $b$  within time  $T$  as long as  $b > b_0$  where the limiting bound  $b_0$  is of course



a pretty complex function of model uncertainties and controller design parameters. In addition the theorem says that the higher the ratio  $\lambda_{\min}(Q)/\lambda_{\max}(P)$  is the higher amount of uncertainty  $\Delta A$  can be tolerated. However, clearly, the desirable minimization of  $b_0$  and  $T$  with respect to controller design parameters is not simple given the complexity of the dependance of  $b_0$  and  $T$  on model uncertainties and controller design.

## V. SEMI-ACTIVE CONTROL

Following the result of Thm. 1, energy dissipation mechanism is depicted by  $\dot{V}(x)$  in (10). It consists of three terms: the first one can arbitrarily be fixed by the user, by properly choosing matrix  $Q$ , in accordance with control objective of floor spectrum reduction. It is a matter of simple calculation to show that the second term is nonpositive for all  $x$ . Actually,  $p(x)$  from (7) was chosen to provide maximal effort, minimum time response, based on this second term of  $\dot{V}$ . The third term is sign uncertain and is responsible for the coupling between uncertainties and perturbation, on the one hand, and controller parameters on the other hand.

Our efforts in shaping energy loss mechanism, such that floor spectrum reduction objective should be achieved, are concentrated on the right choice of  $Q$  matrix.

To compensate the lack of an explicit expression relating the control law and floor spectrum, information related to physical phenomena is used instead: modal shapes and their influence to floor spectrum.

### A. SAC tuning

As already mentioned in Section II it is a standard practice in earthquake engineering to use modal coordinates as follows.

Let  $(\omega_i^2, \varphi_i)$   $i = 1, \dots, n$  be the couples of eigenvalues and right eigenvectors associated with the symmetric matrices  $M$  and  $K$ , and  $M$  is positive-definite: for each  $i$ ,  $\omega_i$  and  $\varphi_i$  verify

$$K \varphi_i = \omega_i^2 M \varphi_i, \quad \varphi_i' M \varphi_j = \delta_{ij}, \quad \varphi_i' K \varphi_j = \omega_i^2 \delta_{ij},$$

where  $\delta_{ij}$  is the Kronecker symbol.  $\omega_i$  and coefficients of  $\varphi_i$  are all real numbers. Let  $(\omega_i^2, \varphi_i)$  be numbered such that  $\omega_1^2 \leq \omega_2^2 \leq \dots \leq \omega_n^2$ . The reader may refer to [4, §11] for more details on the algebra of symmetric positive definite generalized eigenvalue problem.

Let

$$\phi = (\varphi_1 \ \varphi_2 \ \dots \ \varphi_n)$$

be the matrix of *modal shapes*, and let  $q$  be the *modal coordinates* vector defined such that

$$z_r(t) = \phi q(t) = \varphi_1 q_1(t) + \varphi_2 q_2(t) + \dots + \varphi_n q_n(t).$$

Though not limited to two-degree-of-freedom structures, this semi-active control is applied to the case  $n = 2$  for simplicity in the sequel.

Modal coordinates transformations are used in the following way to influence the floor spectrum. Let  $W$  be

a negative definite function, used to construct the first term in (10),

$$W = -\gamma_1 \dot{q}_1^2 - \gamma_2 \dot{q}_2^2 - \gamma_3 \dot{q}_1^2 - \gamma_4 \dot{q}_2^2,$$

with real parameters  $\gamma_i > 0$ . Parameters  $\gamma_1$  and  $\gamma_3$  are used to penalize the effect of first vibrational mode, in terms of generalized modal displacement and velocity, respectively. Similarly  $\gamma_2$  and  $\gamma_4$  are used to penalize the effect of second vibrational mode. By setting  $-x'Qx = W$  with

$$x = \begin{pmatrix} z_r \\ \dot{z}_r \end{pmatrix},$$

direct calculation lead to the following bloc diagonal matrix

$$Q = \text{diag} \left( M' (\gamma_1 \varphi_1 \varphi_1' + \gamma_2 \varphi_2 \varphi_2') M, \right. \\ \left. M' (\gamma_3 \varphi_1 \varphi_1' + \gamma_4 \varphi_2 \varphi_2') M \right),$$

and the structure model (1) can be rewritten as

$$\dot{x} = A x + B(x) c_A + D \nu, \quad x(0) = 0_{2n \times 1}, \quad (11)$$

where

$$A = \begin{pmatrix} 0_2 & 1_2 \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{pmatrix}, \\ B(x) = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -e'x/m_b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 0_{2 \times 1} \\ -1_{2 \times 1} \end{pmatrix}, \\ \nu = \ddot{x}_g,$$

and

$$e' = (0 \ 0 \ 1 \ 0).$$

Notations  $0_{n \times 1}$ ,  $0_n$  stand, respectively, for column vector of dimension  $n$  and matrices of size  $n \times n$  with 0 as coefficients; notation  $1_{n \times 1}$ , stands for column vector with 1 as coefficients, and  $1_n$  is the identity matrix of size  $n$ .

System (11) is of the form (5) allowing to apply Theorem 1.

### B. Features and remarks

Control law calculated in subsection V-A, guarantees the required constraint specification  $c_A(t) \in [0, c_A^{\max}]$  if one fixed  $\rho(\cdot) \equiv c_A^{\max}$ . In this situation the semi-active controller is generating at all time instants the maximum calculated damping control force  $-c_A(t)\dot{z}_{r1}(t)$ .

On the other hand, a different approach to choosing  $\rho(\cdot)$  is

$$\rho(x) = c_A^{\max} (1 + \tanh(-|q_2(x)|)) \quad (12)$$

motivated by the objective of floor response spectrum reduction around the second eigenfrequency.

The idea in (12) is to avoid amplification of second mode's response, as it becomes more and more prominent by reducing gradually the control force at the base level.

Actually this is a compromise solution, meaning that reduction of peaks around second eigenfrequency on floor spectrum curve is done in the detriment of first peak.

This method concerning controller synthesis and tuning can easily be applied on structure model (1) rewritten in absolute coordinates, instead of relative ones as is done in this paper. In this situation, the new plant model system is still of the form (5), allowing for Thm. 1 to be applied. The feedback control law  $c_A$  will be a function depending on absolute coordinates. Numerical simulation results not shown in this paper, illustrate similar performance in terms of floor spectrum with those presented in section VI.

## VI. SIMULATION RESULTS

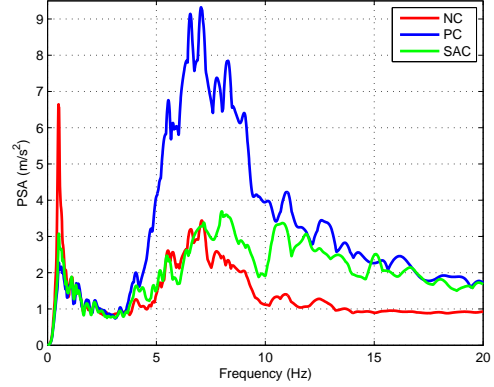
In this section we illustrate the performance of the proposed semi-active control through the 2-degree of freedom structure already detailed throughout the previous section. The parameters (in consistent units) which are used in the simulations are as follows:  $m_b = 0.25$ ;  $m_s = 1$ ;  $c_b = 0.3927$ ;  $k_b = 12.3370$ ;  $c_s = 1.8850$ ;  $k_s = 355.3058$ ;  $c_A^{\max} = 2 \Delta \xi_b \sqrt{k_b(m_b + m_s)}$ ;  $\Delta \xi_b = 0.20$ ;  $\xi_b = 0.05$ .

Numerical simulation parameters are fixed to: time-duration of 15 seconds; sampling and computation time is  $10^{-4}$  seconds; fourth-order Runge-Kutta fixed-step numerical solver. Floor spectrum numerical algorithm is taken from [13] and its damping ratio is set to  $\zeta = 2\%$ .

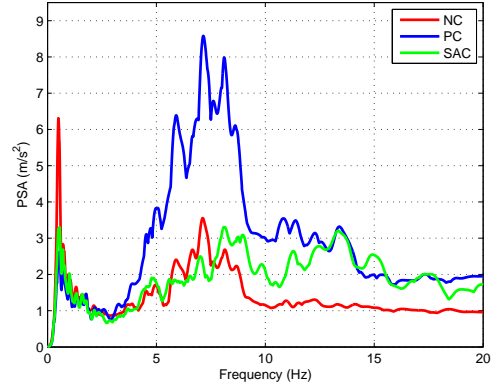
Multiple control scenarios are proposed for comparison purposes:

- NC (no control): this is the uncontrolled structure dynamic response to the seismic excitation. Specifically, the structure may be thought as with base isolation consisting of low damping rubber bearing (LDRB) device, with a damping coefficient  $\xi_b$ .
- PC (passive control): an additional damping is put at the base level consisting of a high damping rubber bearing (HDRB), so that the total equivalent damping coefficient is  $\xi_b + \Delta \xi_b$ .
- SAC from subsection V-A: corresponds to implementing control law (7) on plant model (11), with parameters  $\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\gamma_1 = \gamma_3 = 3$ ,  $\gamma_2 = \gamma_4 = 10^4$ ,  $\rho(\cdot) \equiv c_A^{\max}$ .

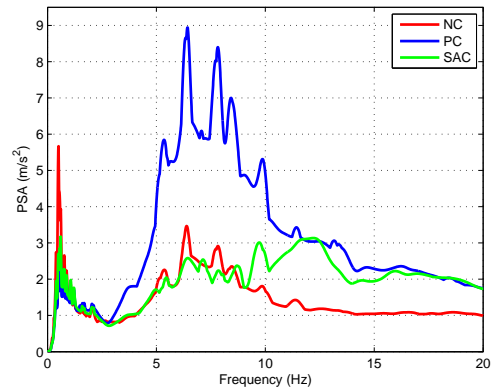
Instead of real records of seismic signal it is found more illustrative to use artificial ones for  $\ddot{x}_g(t)$ . The reader may find them in the appendix. These signals suit the ground response pseudoacceleration spectrum specification of Cadarache rock site, in southern France. They were scaled in amplitude to reach a maximum absolute value of  $0.6g \approx 5.88 \text{ m/s}^2$ , with  $g = 9.81 \text{ m/s}^2$ . The reason in doing so is to ensure controller to be within the full working range of 0 to  $c_A^{\max}$ . Otherwise, if signals are too weak compared to a reference, namely the signal used to calibrate controller parameters, the effect of adding a SAC force is negligible with respect to the natural behavior of structure. On the contrary, if seismic signals are too strong the SAC may saturate and it will act as PC with high damping, which again is not wanted.



**Fig. 2:** Floor response spectrum at the base in response to seismic signal record no. 1



**Fig. 3:** Floor response spectrum at the base in response to seismic signal record no. 2



**Fig. 4:** Floor response spectrum at the base in response to seismic signal record no. 3

In other words, prior to implementing in practice this SAC, it is necessary to have some *a priori* knowledge on the maximum amplitude of seismic signal to hit the structure. In earthquake engineering, this information is often used in seismic characterization and is called

peak ground acceleration. On the other hand, it is also required by Thm. 1 as in its second assumption.

Moreover, the selection of seismic signals is made such that they are wide-band sufficiently rich in

- low spectral content around first eigenfrequency so that we can notice a pretty large first peak on floor spectrum curve is observed when using NC,
- higher spectral content around second eigenfrequency, otherwise, phenomena related to amplification of second mode of vibration, e.g., when using PC, might not be visible in terms of floor spectrum. Often, this is the case for earthquake signals recorded on stiff soil and rock sites.

The controller parameters are calibrated once for all three simulations. They are calculated with the seismic signal in Fig. 2. The other two figures then serve for validation and to support further discussions on controller capabilities. Since the choice of controller parameters has been made with respect to only one seismic signal, one may wonder whether or not the result concerning adjustment controller parameters is globally available. By looking at Figs. 3–4, one can notice a visible advantage and improvement when using SAC over PC in terms of floor spectrum evaluation especially around second eigenfrequency. However, in practice locally available data (characteristics of known recorded signals or artificially generated ones, e.g., in terms of maximum amplitude, energy, etc., and geographical site) should be used to fine tune controller parameters.

Although not shown here, in terms of floor spectrum gauge we do not have up-to-date any concluding results that the SAC proposed in this paper is better than other semi-active control strategies already presented in the literature, like the one in [15].

Extended simulations with randomly chosen natural, historical, seismic events showed that, as a worst case behavior of this SAC device with fixed adjustment parameters, the performance in terms of floor response spectra will be at least as good as PC.

*Further work:* In this paper we have used two-degree-of-freedom structure models that are simple enough and therefore control-oriented, so that they might allow implementation in real-time scenarios. However, real world three-dimensional (3D) applications are much more complex than what is discussed and presented here and consequently will be more demanding in terms of control law design. For instance, the following should be taken into account for control design in a future stage of our work: (i) rotation [14] of the structure model; (ii) nonlinearities of the isolation systems, like friction; (iii) time delays and saturation in force of the SAC actuator.

## VII. CONCLUSIONS

In this paper Leitmann and co-authors's results on the stabilization of uncertain nonlinear systems and on earthquake structure protection both have been revisited. Bounds are calculated guaranteeing some interest-

ing control design parameters. This result is more user friendly. The major achievement lies in the adaptation of control law and system dynamics towards solving SAC problems. A second contribution of this paper consisted in presenting a method for choosing SAC parameters, based on vibrational modes analysis. One reason for proceeding in this direction is that performance in closed-loop of structure response to unknown seismic signals is evaluated qualitatively in terms of floor response pseudoacceleration spectrum. It is showed that working with information related to balls radius size in state space coordinates might provide efficient and potential means to reduce floor response spectra.

## REFERENCES

- [1] A.K. Chopra, *Dynamics of Structures: Theory and Applications to Earthquake Engineering*, Third edition, Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 2007.
- [2] R.W. Clough, J. Penzien, *Dynamics of Structures*, Third edition, CSI, Berkeley, CA, 2003.
- [3] M.J. Corless, G. Leitmann, Continuous State Feedback Guaranteeing Uniform Ultimate Boundedness for Uncertain Dynamical Systems, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **AC-26**(1981), 1139–1144.
- [4] B.N. Datta, *Numerical linear algebra and applications*, second edition, SIAM, Philadelphia, PA, 2010.
- [5] S. Gutman, Uncertain dynamical systems—A Lyapunov min-max approach, *IEEE Trans. Automat. Contr.*, **24**(1979), 437–443.
- [6] S. Gutman, G. Leitmann, Stabilizing feedback control for dynamical systems with bounded uncertainty, in *Proc. IEEE Conf. Decison Contr.*, 1976, pp. 94–99.
- [7] D.J. Inman, *Vibration with Control*, John Wiley & Sons, West Sussex, England, 2006.
- [8] J.M. Kelly, G. Leitmann, A.G. Soldatos, Robust control of base-isolated structures under earthquake excitation, *J. Optimization Theory and Applications*, **53**(1987), 159–180.
- [9] H.K. Khalil, *Nonlinear Systems*, Third edition, Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2002.
- [10] G. Leitmann, Guaranteed Asymptotic Stability for a Class of Uncertain Linear Dynamical Systems, *J. Optimization Theory and Applications*, **27**(1979), 99–106.
- [11] F. Naeim, J.M. Kelly, *Design of Seismic Isolated Structures: From Theory to Practice*, John Wiley & Sons, New York, 1999.
- [12] S. Narasimhan, S. Nagarajaiah, E.A. Johnson, Smart base-isolated benchmark building part IV: Phase II sample controllers for nonlinear isolation systems, *Struct. Control Health Monit.*, **15**(2008), 657–672.
- [13] N.N. Nigam, P.C. Jennings, Digital calculation of response spectra from strong-motion earthquake records, Technical Report, Earthquake engng. research laboratory, California Institute of Technology, June 1968.
- [14] I. Politopoulos, Response of seismically isolated structures to rocking type excitations, *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, **39**(2010), 325–342.
- [15] I. Politopoulos, H.K. Pham, Floor spectra of mixed base isolated structures, *Bull. Earthquake Engng.*, **9**(2011), 1115–1135.
- [16] A. Preumont, *Vibration Control of Active Structures. An Introduction*, second edition, Solid Mechanics and its Applications, Kluwer Acad. Publ., New York, 2002.
- [17] T.T. Soong, *Active Structural Control: Theory and Practice*, Longman Scientific & Technical, Harlow, Essex, England, 1990.
- [18] W.L. Wang, G.X. Xu, Fluid formulae for damping changeability conceptual design of railway semi-active hydraulic dampers, *Int. J. Non-Linear Mechanics*, **44**(2009), 809–819.
- [19] E. Zentner, F. Poirion, Enrichment of seismic ground motion databases using Karhunen-Loève expansion, *Earthquake Engng. Struct. Dyn.*, (2012).



**Abstract:** Vibration attenuation control designs are proposed for reduced mechanical models of  $n$ -degree-of-freedom base-seismically-isolated structures (*i.e.* a specific type of earthquake-resistant design). Non-linearities as well as uncertainties are included in the models of the structures which are supposed to be subject to the horizontal component of earthquake ground acceleration which is treated as an unknown disturbance but assumed to be bounded.

The main result of this work is the development of a modified version of Leitmann and co-authors' classical result on the stabilization of uncertain nonlinear systems. The proposed theorem consists of a bounded nonlinear feedback control law that is capable of ensuring uniform boundedness and uniform ultimate boundedness in closed-loop. In particular, it can be applied to solving semi-active control design problems which are currently dealt with in earthquake engineering. The control objective is to attenuate the effect of earthquakes on mixed base-isolated structures. Compared to known existing literature the present work: (i) pays attention to the protection of equipment placed inside the structure and not only to the structure itself; (ii) instead of using regular performance indicators expressed in terms of relative base displacement versus floors absolute accelerations, we use the pseudo-acceleration floor response spectra as it was proposed in previous recent works by Politopoulos and Pham. The present work is an attempt to explicitly use floor response spectra as performance criterion.

It also includes details on: (i) modeling of earthquake signals; (ii) tuning of control law parameters based on vibration theory; (iii) validation and testing of the closed-loop behavior using numerical simulations: only the case  $n = 2$  is dealt with. The general case may be seen as reducible to the previous one,  $n = 2$ . This procedure can be used on structures of both nuclear industry as well as civil engineering.

Finally we also propose an attempt to using time-frequency concepts, namely Wigner-Ville distribution, in the control law design procedure. The motivation of this part of the work is for better controlling transient components of both perturbation (the input) and state variables signals (the output) of a dynamical system.

**Keywords:** semi-active control, robust nonlinear control, structural control, earthquake protection systems, mixed base-isolation, floor response spectra, Wigner-Ville distribution.

**Résumé :** Nous nous intéressons aux méthodes de contrôle de vibrations de modèles mécaniques réduits de structures à  $n$  degrés de liberté, sismiquement isolées au niveau de la base par des systèmes d'isolation mixte; le mouvement de la structure provoqué par une sollicitation sismique horizontale a lieu dans un plan vertical. Nous avons construit un problème de contrôle semi-actif de systèmes incertains soumis à des perturbations inconnues, mais bornées.

Le résultat principal de cette thèse porte sur la construction d'une version modifiée des résultats de Leitmann et de ses collaborateurs sur la stabilisation de systèmes non linéaires incertains. Le théorème proposé repose sur une loi de commande par retour d'état qui assure en boucle fermée les propriétés de *uniform boundedness* et *uniform ultimate boundedness*. En particulier, il peut être appliqué à la résolution de problèmes de contrôle semi-actif, qui sont actuellement traités en génie parasismique. L'objectif du contrôle est d'améliorer le comportement (*i.e.* la réponse) de structures isolées en atténuant l'effet des perturbations externes, c'est-à-dire les séismes. En comparaison avec la littérature existante dont nous avons connaissance, notre travail apporte les points suivants : (i) on ne s'intéresse pas seulement à la protection de la structure isolée, mais aussi aux équipements situés à l'intérieur de la structure, et (ii) au lieu d'utiliser des indicateurs de performance habituels exprimés en termes de déplacement relatif de la base *vs* des accélérations absolues des planchers, nous utilisons uniquement le spectre de plancher en pseudo-accélération, comme il a été proposé dans des travaux précédents par Politopoulos et Pham. Ce travail est une tentative d'utiliser explicitement les spectres de plancher comme critère de performance. Concernant la procédure d'application, plusieurs étapes intermédiaires ont été détaillées : (i) modélisation de signaux sismiques ; (ii) réglage des paramètres de la loi de commande utilisant la théorie des vibrations ; (iii) validation et test du comportement en boucle fermée à travers des simulations numériques : pour des raisons de simplicité, on se limite au cas  $n = 2$ . Cette procédure peut être utilisée sur des structures en industrie nucléaire, mais aussi en génie civil.

D'autres sujets traités incluent une tentative d'utiliser les outils temps-fréquence, et en particulier la distribution de Wigner-Ville, pour la synthèse de lois de commande, en espérant pouvoir mieux contrôler les composants transitoires des signaux de perturbation (les entrées) et des variables d'état (les sorties).

**Mots-clés :** contrôle semi-actif, commande robuste non linéaire, contrôle de structures, protection parasismique, systèmes d'isolation mixte, spectre de plancher, distribution de Wigner-Ville.